

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Р 76 07

На правах рукописи  
УДК 532.5

Франк Александр Максович

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

05.13.16 – применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Новосибирск 1994

Работа выполнена в Вычислительном центре СО РАН г.Красноярск

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН, доктор  
физико-математических наук  
П.И.Плотников

доктор физико-математических  
наук В.М.Ковеня

доктор физико-математических  
наук Е.Н.Пелиновский

Ведущая организация: Институт математики и механики  
Уральского отделения РАН

Защита состоится "29." марта 1994г. в 15  
часов на заседании специализированного Совета Д 002.10.02  
при Вычислительном центре СО РАН по адресу:  
660036, Новосибирск-90, проспект академика Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки  
ВЦ СО РАН (проспект академика Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан "3" февраля 1994г.

Ученый секретарь  
специализированного Совета  
кандидат технических наук



Г.И.Забиняко

## Общая характеристика работы.

Во многих областях науки и техники, таких как физическая океанология, гидротехника, кораблестроение и других, возникает проблема численного решения нестационарных задач динамики несжимаемой жидкости со свободными границами. Эти задачи традиционно считаются непростыми, поскольку к нелинейности уравнений гидродинамики здесь добавляется дополнительная нелинейность вследствие изменения формы области. Несмотря на стремительный рост быстродействия современных ЭВМ, большой круг задач, возникающих в практике, по-прежнему является серьезной проблемой для численного моделирования. Особые затруднения возникают в задачах со сложной неустойчивой формой свободной границы, например при обрушении поверхностных волн. Поэтому построение эффективных численных моделей является здесь актуальной задачей.

Дискретные модели жидкости являются основой для построения эффективных методов вычислительной гидродинамики, обладающих рядом привлекательных свойств. В нашей стране дискретный подход в гидродинамике, в основном применительно к задачам газовой динамики, был развит под руководством академика А.А.Самарского.

Цель работы заключается в разработке и исследовании дискретных моделей идеальной несжимаемой жидкости для численного моделирования задач динамики волн.

Научная новизна. Построены и исследованы на ряде задач дискретные модели для описания движения плоских и пространственных волн над произвольным неровным дном. Построена дискретная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды. Проведено подробное численное исследование задачи о маховском отражении уединенных волн. Предложен экономичный полностью консервативный численный метод реализации дискретных моделей. Разработан экономичный метод построения сетки Дирихле для нестационарных задач. Построен и исследован ряд свободно-лагранжевых дискретных моделей жидкости, включая модель с частицами переменной массы для расчета течений с большими деформациями. Разработан принципиально новый свободно-лагранжев метод моделирования задач динамики волн.

Практическая значимость. Предложенные численные модели могут быть использованы для математического моделирования волновых процессов в задачах океанологии, гидротехники и кораблестроения.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на

Межд. конф. "Математические модели и численные методы механики сплошной среды" памяти Н.Н.Яненко (Новосибирск, 1991); Советско-японском симпозиуме по вычислительной аэрогидродинамике (Хабаровск, 1988); на Всесоюзной конф. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 1987); на Всесоюзной школе-семинаре по численным методам механики вязкой жидкости (Абакан, 1990, Новосибирск, 1992); на Всесоюзном совещании по вычислительным методам в проблеме цунами (Шушенское, 1987); на Всесоюзном совещании по численным методам в задачах волновой гидродинамики (Абакан, 1988, Ростов-на-Дону, 1990); на Всесоюзной школе молодых ученых по численным методам механики сплошной среды (Абрау-Дюрсо, 1991, 1992); на Всесоюзной конф. по методам гидрофизических исследований (Солнечногорск, 1985); на совещаниях рабочей группы "Лабораторное моделирование динамических процессов в океане" комиссии АН СССР по проблемам Мирового океана (Канев, 1988, Юмала, 1990, Владивосток, 1991); на совещаниях исполнителей проекта "Волна" (Севастополь, 1987, 1989, 1990, 1991); на научных семинарах ИГиЛ СО РАН, ИТМ СО РАН, ИВТ СО РАН, ВЦ СО РАН (г.Красноярск).

Полностью диссертация обсуждалась на семинарах в ИГиЛ СО РАН, ИВТ СО РАН, ИТМ СО РАН, ИГМех. РАН, ВЦ СО РАН (Новосибирск), ВЦ СО РАН (Красноярск).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Список литературы содержит 130 наименований. Объем диссертации 248 страниц.

#### Содержание работы.

Во **введении** приведен обзор существующих подходов к численному решению задач динамики жидкости со свободными границами, и кратко изложено содержание диссертации по главам.

В **первой главе** изложены общие принципы построения дискретных моделей несжимаемой жидкости, а также численный метод решения уравнений движения. Параграф 1.1 содержит описание дискретного подхода. Он заключается в том, что жидкий объем  $V$  разбивается на элементарные объемы, например с помощью какой-либо сетки, в том числе криволинейной и нерегулярной. Каждый из элементарных объемов теперь можно рассматривать как частицу. Частица обладает некоторой массой, импульсом и потенциальной энергией в поле силы тяжести. Считается, что потенциальных взаимодействий между частицами нет, также как нет их между жидкими частицами в классической теории несжимаемой жид-

## Общая характеристика работы.

Во многих областях науки и техники, таких как физическая океанология, гидротехника, кораблестроение и других, возникает проблема численного решения нестационарных задач динамики несжимаемой жидкости со свободными границами. Эти задачи традиционно считаются непростыми, поскольку к нелинейности уравнений гидродинамики здесь добавляется дополнительная нелинейность вследствие изменения формы области. Несмотря на стремительный рост быстродействия современных ЭВМ, большой круг задач, возникающих в практике, по-прежнему является серьезной проблемой для численного моделирования. Особые затруднения возникают в задачах со сложной неустойчивой формой свободной границы, например при обрушении поверхностных волн. Поэтому построение эффективных численных моделей является здесь актуальной задачей.

Дискретные модели жидкости являются основой для построения эффективных методов вычислительной гидродинамики, обладающих рядом привлекательных свойств. В нашей стране дискретный подход в гидродинамике, в основном применительно к задачам газовой динамики, был развит под руководством академика А.А.Самарского.

Цель работы заключается в разработке и исследовании дискретных моделей идеальной несжимаемой жидкости для численного моделирования задач динамики волн.

Научная новизна. Построены и исследованы на ряде задач дискретные модели для описания движения плоских и пространственных волн над произвольным неровным дном. Построена дискретная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды. Проведено подробное численное исследование задачи о маховском отражении уединенных волн. Предложен экономичный полностью консервативный численный метод реализации дискретных моделей. Разработан экономичный метод построения сетки Дирихле для нестационарных задач. Построен и исследован ряд свободно-лагранжевых дискретных моделей жидкости, включая модель с частицами переменной массы для расчета течений с большими деформациями. Разработан принципиально новый свободно-лагранжев метод моделирования задач динамики волн.

Практическая значимость. Предложенные численные модели могут быть использованы для математического моделирования волновых процессов в задачах океанологии, гидротехники и кораблестроения.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на

Межд. конф. "Математические модели и численные методы механики сплошной среды" памяти Н.Н.Яненко (Новосибирск, 1991); Советско-японском симпозиуме по вычислительной аэрогидродинамике (Хабаровск, 1988); на Всесоюзной конф. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 1987); на Всесоюзной школе-семинаре по численным методам механики вязкой жидкости (Абакан, 1990, Новосибирск, 1992); на Всесоюзном совещании по вычислительным методам в проблеме цунами (Шушенское, 1987); на Всесоюзном совещании по численным методам в задачах волновой гидродинамики (Абакан, 1988, Ростов-на-Дону, 1990); на Всесоюзной школе молодых ученых по численным методам механики сплошной среды (Абрау-Дюрсо, 1991, 1992); на Всесоюзной конф. по методам гидрофизических исследований (Солнечногорск, 1985); на совещаниях рабочей группы "Лабораторное моделирование динамических процессов в океане" комиссии АН СССР по проблемам Мирового океана (Канев, 1988, Юмала, 1990, Владивосток, 1991); на совещаниях исполнителей проекта "Волна" (Севастополь, 1987, 1989, 1990, 1991); на научных семинарах ИГиЛ СО РАН, ИТПМ СО РАН, ИВТ СО РАН, ВЦ СО РАН (г.Красноярск).

Полностью диссертация обсуждалась на семинарах в ИГиЛ СО РАН, ИВТ СО РАН, ИТПМ СО РАН, ИГМех. РАН, ВЦ СО РАН (Новосибирск), ВЦ СО РАН (Красноярск).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Список литературы содержит 130 наименований. Объем диссертации 248 страниц.

#### Содержание работы.

Во **введении** приведен обзор существующих подходов к численному решению задач динамики жидкости со свободными границами, и кратко изложено содержание диссертации по главам.

В **первой главе** изложены общие принципы построения дискретных моделей несжимаемой жидкости, а также численный метод решения уравнений движения. Параграф 1.1 содержит описание дискретного подхода. Он заключается в том, что жидкий объем  $V$  разбивается на элементарные объемы, например с помощью какой-либо сетки, в том числе криволинейной и нерегулярной. Каждый из элементарных объемов теперь можно рассматривать как частицу. Частица обладает некоторой массой, импульсом и потенциальной энергией в поле силы тяжести. Считается, что потенциальных взаимодействий между частицами нет, также как нет их между жидкими частицами в классической теории несжимаемой жид-

кости. Вместо этого, в теории несжимаемой жидкости вводится условие несжимаемости, которое по-сути является чисто кинематическим ограничением на возможные поля скорости. Аналогично, в дискретных моделях вводится некоторый дискретный аналог условия несжимаемости. Простейшим примером такого условия несжимаемости в плоском случае (см. ниже гл.2) может служить требование постоянства площадей ячеек четырехугольной лагранжовой сетки в процессе движения материальных частиц, расположенных в узлах этой сетки. Такие условия являются голономными связями вида

$$f_s(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

ограничивающими возможные движения частиц. Ограничения вида (1) возникают и при многих других способах дискретизации.

В случае, если в рассматриваемой задаче необходимо учесть влияние силы тяжести или другой внешней массовой силы, необходимо ввести в рассмотрение потенциальную энергию  $\Pi$  системы частиц в поле этой силы. Тем самым оказывается полностью определенным лагранжиан такой системы

$$L = \frac{1}{2} \sum_k m_k u_k^2 - \Pi + \sum_s \lambda_s f_s(\mathbf{r}) \quad (2)$$

и, следовательно, уравнения движения

$$\begin{aligned} m_k \dot{u}_k &= \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_k} \\ \dot{\mathbf{r}}_k &= \mathbf{u}_k \\ f_s(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $m_k$ ,  $u_k$ ,  $\mathbf{r}_k$  - масса, скорость и радиус-вектор  $k$ -ой частицы,  $\lambda_s$  - множители Лагранжа. Множители  $\lambda_s$  возникают вследствие кинематических ограничений (1) и являются, по-сути, аналогом гидродинамического давления. Граничные условия на свободных и жестких границах также достаточно естественно включаются в эту общую схему с помощью введения обобщенных координат частиц.

Хорошо известно, что для системы (3) при любом числе степеней свободы выполнен закон сохранения полной энергии, если лагранжиан не зависит явно от  $t$ . Далее, в отсутствие внешней силы, т.е. при  $\Pi = 0$ , суммарные импульс и момент импульса системы сохраняются, если связи (1) инвариантны относительно пространственных сдвигов и вра-

щений. Заметим, что это справедливо при любом числе степеней свободы. Таким образом дискретная модель имеет определенный физический смысл даже при очень грубой пространственной дискретизации. Количество степеней свободы отвечает здесь уже за внутренние свойства дискретной среды, ее деформируемость, изотропию и т.д.

В параграфе 1.2 строится одношаговый полностью консервативный метод численного интегрирования системы (3). Обозначим число степеней свободы через  $N$ , число голономных связей  $M$ , векторы, составленные из обобщенных координат и скоростей всех частиц, соответственно,  $q=(q_1, \dots, q_N)$ ,  $u=(u_1, \dots, u_N)$ . Тогда предложенный алгоритм имеет вид

$$\tilde{q}_k = q_k^{n+1} + 0.5\tau u_k^n, \quad (4.1)$$

$$m_k u_k^{n+1} = m_k u_k^n + \tau \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_k}(\tilde{q}) - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}(\tilde{q}), \quad (4.2)$$

$$\tilde{u}_k = (u_k^{n+1} + u_k^n)/2, \quad (4.3)$$

$$q_k^{n+1} = q_k^n + \tau \tilde{u}_k, \quad (4.4)$$

$$\sum_k \frac{\partial f_s}{\partial q_k}(\tilde{q}) \tilde{u}_k = 0. \quad (4.5)$$

Условия (4.5) удовлетворяются на каждом шаге следующим образом.

Выражая  $u_k$  из (4.2), (4.3), и подставляя в (4.5), имеем систему линейных уравнений для определения  $\lambda_j$

$$\sum_j a_{sj} \lambda_j = H_s, \quad s = 1, \dots, M, \quad (5)$$

где

$$a_{sj} = \sum_k \frac{1}{m_k} \frac{\partial f_s}{\partial q_k}(\tilde{q}) \frac{\partial f_j}{\partial q_k}(\tilde{q}), \quad H_s = -\frac{2}{\tau} \sum_k (u_k^n - \frac{1}{m_k} \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}(\tilde{q})) \frac{\partial f_s}{\partial q_k}(\tilde{q}).$$

Определив таким образом  $\lambda_s$ , остальные величины можно вычислить явно из (4.2)-(4.4), при этом обеспечивается выполнение (4.5).

Далее показано, что для  $\Pi = 0$  схема (4) обеспечивает точное выполнение законов сохранения импульса и момента импульса при условии инвариантности связей относительно жестких сдвигов и поворотов. Если  $\Pi$  является линейной функцией координат, то это же справедливо и в отношении полной энергии. Полная консервативность получается



здесь без дополнительных затрат, то есть в отличие, скажем, от газовой динамики она не вносит дополнительной неясности. Схема обладает вторым порядком аппроксимации за счет введения предиктора (4.1). Заметим, что этот предиктор также практически не увеличивает объем вычислений.

В диссертации приведена наглядная геометрическая интерпретация метода, демонстрирующая аналогию с численными методами динамики несжимаемой жидкости, в которых используется проектирование предварительно найденного поля скорости на соленоидальное подпространство.

Приводятся результаты расчетов тестовых задач. Сравнение с методом Рунге-Кутты второго порядка показало, что данный метод, являющийся в два раза более экономичным из-за одного вычисления правой части на каждом шаге, обладает также и лучшей точностью.

Вторая глава посвящена построению и исследованию двумерной дискретной модели на регулярной четырехугольной лагранжевой сетке. Эта модель имеет определенное сходство с известным лагранжевым методом LINC. Близкие дискретные модели, использующие гамильтонов подход, предлагались в работах: Гасилов В.А., Головизнин В.М. и др. //Препринт №70, ИГиМатем. АН СССР, 1979; Коробицын В.А., Либин З.Е. // В сб. Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Томск: Томский ун-т, 1975.

Параграф 2.1 содержит описание модели, исследование аппроксимации и дисперсии. В начальный момент времени расчетная область покрывается криволинейной четырехугольной сеткой. Далее считается, что в узлах сетки находятся материальные частицы с массой, являющейся суммой четвертых частей масс, прилежащих к данному узлу четырехугольников. Дискретное условие несжимаемости, вводится как требование постоянства площадей всех ячеек сетки в процессе движения среды.

$$V_{i,j} = \text{const.} \quad (6)$$

Площадь каждого четырехугольника - функция координат его вершин поэтому соотношения (6) представляют собой голономные связи, наложенные на возможные движения частиц. На частицы, лежащие на твердых границах, накладываются дополнительные ограничения возможности движения только вдоль границ (т.е. условие непротекания).

В отличие от цитированных выше работ сила тяжести для описания движения тяжелой жидкости вводится здесь через потенциальную энер-

гию вида

$$\Pi = \rho g \int_{\Omega'} y dx dy, \quad (7)$$

где  $\Omega'$  — область занятая дискретной средой. Такой способ обеспечивает равновесие покоящегося слоя "жидкости" с ровной невозмущенной свободной границей при любой начальной сетке.

На примере движения бесконечного слоя идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей показано, что дискретная модель аппроксимирует соответствующую краевую задачу для уравнений Эйлера.

Для исследования дисперсионных свойств модели получено точное дисперсионное соотношение для линейных волн в слое дискретной среды конечной глубины  $H$ . Показано, что закон дисперсии стремится к точному при стремлении шагов сетки  $h_1, h_2$  к нулю. Полученные зависимости показывают, что волны с длиной  $\lambda \geq 7H$  можно успешно моделировать уже при  $h_1 = H, h_2 = H/2$ . Приводимые далее численные расчеты показали, что такой сетки вполне достаточно для адекватного моделирования уединенных волн, а также процесса их взаимодействия с вертикальной стенкой.

Показано также, что при определенных параметрах сетки закон дисперсии для волн с  $\lambda \geq 3.5H$  практически совпадает с дисперсионной кривой для уравнений Буссиэска. Как уже отмечалось выше, при большом разрешении закон дисперсии стремится к точному. Таким образом данная дискретная модель может являться своеобразным мостиком между приближенными моделями теории мелкой воды и точной постановкой. Причем этот переход осуществляется простым увеличением числа степеней свободы.

В параграфе 2.2 описаны результаты численного моделирования уединенных волн и их взаимодействия с вертикальной и наклонной стенкой. Генерация волн осуществлялась с помощью создания локального возвышения уровня жидкости (рис.1). После генерации волна распространяется по лотку, при этом ее амплитуда и форма через некоторое время устанавливаются. На рис.1 приведен пример установившейся волны в сравнении с решением теории второго приближения мелкой воды (пунктир).

Сравнение со вторым приближением теории мелкой воды проводилось также по скорости распространения волн  $C$ . Результаты для нескольких значений амплитуд в сравнении с теорией приведены в таблице.

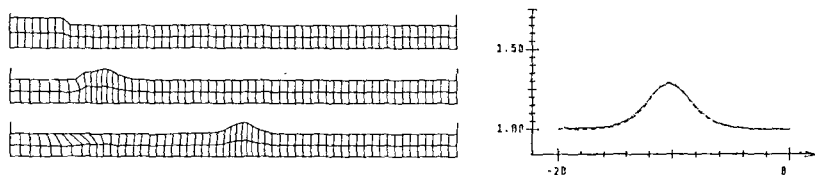


рис. I

A	$\sqrt{1+A}$	C
0.52	1.233	1.231
0.41	1.187	1.185
0.29	1.136	1.134
0.195	1.093	1.089

Видно, что данная модель дает возможность получать хорошие уединенные волны на весьма грубой сетке. Немаловажным является также то, что в дискретных моделях получаются "настоящие" уединенные волны, т.е. незатухающие одиночные возмущения определенной формы, распространяющиеся с постоянной скоростью.

Далее рассмотрена задача о накате уединенных волн на вертикальную и наклонную стенку. На рис.2 точками I показаны результаты расчетов максимального заплеска  $\eta_{\max}$  на стенку в зависимости от амплитуды A падающей волны. Здесь же представлены результаты лабораторных экспериментов (Chan, Street 1970, точки 2), (Загрядская и др. 1980, точки 3), (Maxworthy 1976, штрихпунктирная линия), (Давлетшин 1984, штриховая линия), а также результаты расчетов этой задачи методом SUMMAC (Chan, Street 1970, сплошная линия) и спектральным методом (Fenton, Rienecker 1982, точки 4).

Определялось динамическое воздействие волн на стенку. Так на рис. 3 крестиками показана рассчитанная зависимость от амплитуды волны максимального значения давления на стенке на уровне  $y = 0$ . Кривые 1-3 отвечают, соответственно, экспериментальным данным (Загрядская и др. 1980; Давлетшин 1984) и расчетам (Железняк 1985).

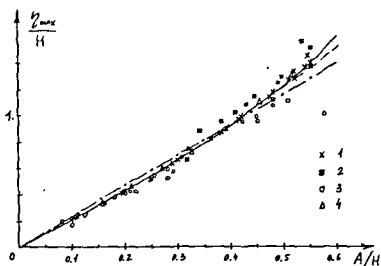


рис. 2

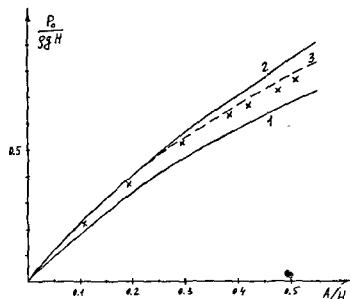


рис. 3

По этой модели проводились также расчеты наката уединенных волн на наклонную стенку с тангенсом угла наклона 1 и 0,5. Результаты по максимальному заплеску неплохо согласуются с данными экспериментов (Hall, Watts 1953).

В параграфе 2.3 описано приложение данной модели к расчету волновой нагрузки от воздействия периодических волн на волнозащитное сооружение специальной конфигурации (Марченко, Нуднер, Симаков 1989). Форма сооружения выбрана так, что при определенной длине волн силы, действующие на переднюю и заднюю стенки находятся в противофазе, и, поэтому, равнодействующая оказывается существенно меньше, чем в случае обычной вертикальной стенки. Это позволяет уменьшить вес сооружения, использовать его на мягких грунтах и т.д. Расчеты проводились с целью сравнения с имеющимися экспериментальными данными, а также для выяснения возможной модификации сооружения при планировании новых экспериментов. Получено неплохое совпадение с имеющимися результатами лабораторных экспериментов.

В третьей главе в рамках того же дискретного подхода строится нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды, которая, как и в непрерывном случае, имеет меньшую размерность и, поэтому, более удобна и экономична при моделировании длинных волн.

Рассматривается задача о движении длинных гравитационных волн в невязкой несжимаемой жидкости над неровным дном. Слой жидкости разбивается на элементарные жидкие объемы  $V_1$  (рис.4).

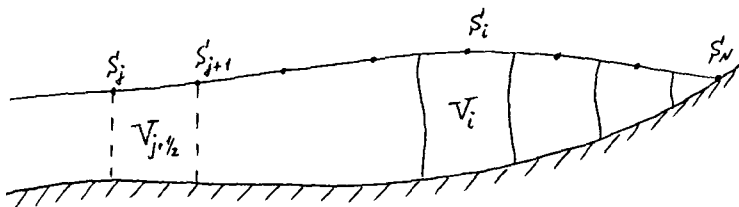


рис. 4

Согласно обычным представлениям в теории мелкой воды считается, что касательная к дну компонента скорости жидкости слабо меняется по глубине, при этом, в силу уравнения неразрывности, нормальная к дну компонента скорости изменяется с глубиной от нуля до некоторого значения на поверхности по закону близкому к линейному. При таком распределении скоростей сдвиговая деформация объемов  $V_1$  невелика и, поэтому, можно попробовать описать это течение как движение совокупности объемов  $V_1$ , каждый из которых рассматривается как материальная частица, движущаяся без трения вдоль дна, имеющая массу  $m_1 = \rho V_1$  и две степени свободы:  $\xi_1$  - координата вдоль кривой, описывающей рельеф дна, и  $\sigma_1$  - характерная толщина слоя жидкости по нормали к дну. Кинетическую энергию такой системы с учетом сделанных выше предположений можно приближенно записать в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_1 m_1 (\dot{\xi}_1^2 + \alpha \dot{\sigma}_1^2), \quad (8)$$

где  $\alpha$  - коэффициент, возникающий при интегрировании квадрата нормальной к дну компоненты скорости жидкости по объему  $V_1$ , равный  $1/3$  в случае ее линейного изменения по нормали.

Для отслеживания положения свободной границы удобно ввести специальные нематериальные частицы-маркеры  $S_1$  (рис.4) с декартовыми координатами  $x_1$ ,  $y_1$ . Тогда потенциальную энергию дискретной системы можно аналогично § 2.1 записать в виде

$$\Pi = \iint_{\Omega} \rho g y dx dy, \quad (9)$$

где  $\rho$  - плотность жидкости,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\Omega$  - область, занятая жидкостью, если под свободной границей понимать ломаную, проведенную через  $S_j$ .

Дискретное условие несжимаемости, гарантирующее точное сохранение объема жидкости также удобно ввести с помощью маркеров. В приводимых ниже рассуждениях и численных расчетах использовалось условие

$$V_{j+1/2} = V_{j+1/2}^0 = \text{const} , \quad (10)$$

где  $V_{j+1/2}$  - объем, вырезаемый из слоя жидкости вертикальными прямыми, проведенными из  $S_j$  и  $S_{j+1}$  (рис. 4). Ясно, что в принципе возможны и другие способы разбиения.

Степенями свободы здесь являются  $\xi_1, \sigma_1, x_1, y_1$ , поэтому необходимо ввести еще некоторые замыкающие соотношения, связывающие движение маркеров с осредненным движением жидкости. В качестве таких соотношений здесь используются неголомонные связи вида

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \delta \xi_1 \cos \varphi_1 - \delta \sigma_1 \sin \varphi_1 , \\ \delta y_1 &= \delta \xi_1 \sin \varphi_1 + \delta \sigma_1 \cos \varphi_1 , \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\varphi_1$  это угол наклона касательной к дну в точке  $x_1$ . Связи (11) постулируют, что маркеры движутся как жидкие частицы на свободной границе с учетом приближения мелкой воды.

Соотношения (8)-(11) полностью определяют движение системы. Выбирая в качестве независимых переменных  $\xi_1, \sigma_1$ , из принципа Гамильтона несложно получить уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\xi}_1 &= -\frac{\partial F}{\partial x_1} \cos \varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1} \sin \varphi_1 \\ \sigma m_1 \ddot{\sigma}_1 &= -\frac{\partial F}{\partial x_1} \sin \varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1} \cos \varphi_1 \\ F &= \sum_S \lambda_{s+1/2} V_{s+1/2} - \Pi \\ \dot{x}_1 &= u_1 = \dot{\xi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\sigma}_1 \sin \varphi_1 \\ \dot{y}_1 &= v_1 = \dot{\xi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\sigma}_1 \cos \varphi_1 \\ V_{s+1/2} &= V_{s+1/2}^0 . \end{aligned} \quad (12)$$

В силу известных теорем классической механики система (12)

обладает законом сохранения полной энергии, а для ровного дна при отсутствии боковых стенок, или для локализованного возмущения, также законом сохранения горизонтальной компоненты импульса.

Для системы (12), найден закон дисперсии линейных гармонических поверхностных волн в бесконечном слое жидкости постоянной глубины

$$\omega^2 = \frac{2 + \cos kh}{3} \cdot \frac{4tg^2 \frac{kh}{2}}{4\alpha tg^2 \frac{kh}{2} + h^2}, \quad (13)$$

где  $\omega$  и  $k$  безразмерные частота волны и ее волновое число,  $h$  - расстояние между маркерами. В пределе при  $h \rightarrow 0$  для  $\alpha = 1/3$  получается известное дисперсионное соотношение, характерное для многих континуальных нелинейно-дисперсионных моделей мелкой воды.

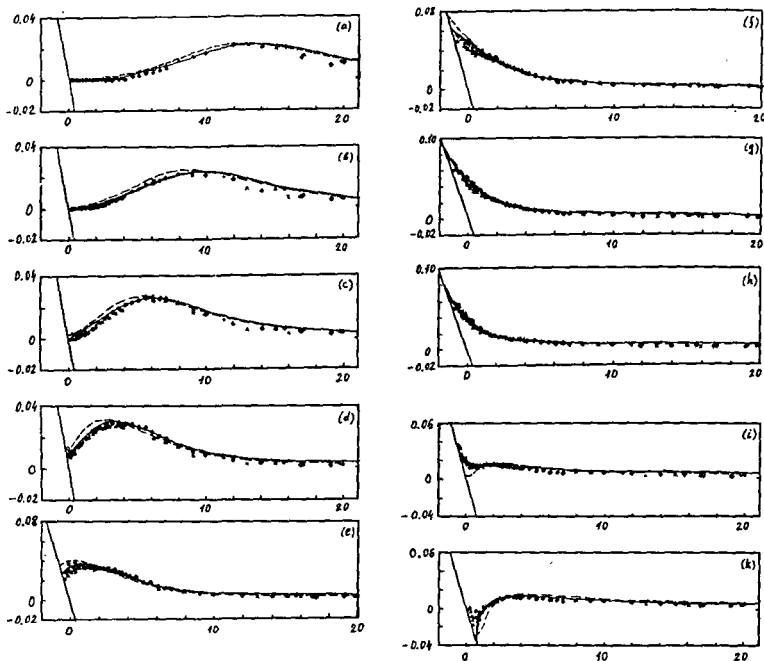


рис. 5

Показано, что уравнения (12) в случае ровного дна дают в пределе при  $h \rightarrow 0$  известные уравнения мелкой воды с дисперсией (Green & Naghdí 1976)

$$\begin{aligned} \eta_{t+} (Hu)_x &= 0, \\ Du + g\eta_x &= -\frac{\alpha}{H} (H^2 D^2 \eta)_x. \end{aligned} \quad (14)$$

Параграф 3.2 посвящен расчетам наката уединенных волн на откос в рамках данной модели. В качестве примера на рис.5 приведена серия картинок, демонстрирующих накат уединенной волны амплитуды  $a = 0.019$  на пологий откос с котангенсом угла наклона 19.85. Результаты численных расчетов по дискретной модели (сплошная кривая) сравниваются с экспериментальными точками и приближенным решением уравнений мелкой воды (пунктир) (Synolakis 1987). В приводимой ниже таблице результаты расчетов максимального заплеска, проведенных по дискретной модели для различных углов откоса и амплитуд волн, сравниваются с расчетами других авторов.

В совокупности, приведенные в этом параграфе результаты показывают, что данная дискретная модель хорошо описывает процесс заплеска при использовании довольно крупной расчетной сетки. Тем самым она может применяться для эффективного сквозного расчета пространства и наката на берег длинных волн, с учетом их трансформации на неровном дне. Отметим еще, что здесь не возникает сложностей с граничными условиями на линии уреза, особенно характерным для моделей с дисперсией.

В параграфе 3.3 проведено моделирование стоячих волн в жидкости конечной глубины. Для этой задачи в работе Tadjbakhsh, Keller (1960) обнаружен интересный нелинейный эффект, заключающийся в том, что частота колебаний возрастает с амплитудой для волн, длина которых превышает значение  $\lambda_* \approx 5.94H$ , и, наоборот, убывает для волн длины меньшей  $\lambda_*$ . При  $\lambda = \lambda_*$  частота от амплитуды не зависит. Поскольку критическое значение  $\lambda_*$  находится в области "средних" длин волн, для которых возможность применения теории длинных волн не очевидна, то эта задача может служить хорошим тестом для нелинейно-дисперсионных моделей мелкой воды, как индикатор качества учета дисперсии.

Рассмотрена также задача с заданным на свободной поверхности



Максимальный заплеск						
$\sigma g \theta$ ( $\theta^\circ$ )	A	Численные расчеты [источник]	Runup law [ S ]	Эксперимент [H&W]	Дискретная модель	
10.000 (5.7°)	0.030 0.050	0.100 [H&H] 0.180	0.112 0.212	- -	0.117 0.217 (0.215)	
3.732 (15°)	0.050 0.100 0.200	0.135 [KLL] 0.308 0.766	0.129 0.308 0.732	0.173 0.281 0.599	0.139 0.309 0.684 (0.687)	
3.333 (16.7°)	0.050 0.100	0.150 [H&H] 0.310	0.122 0.291	0.121 0.264	0.134 0.298 (0.295)	
2.747 (20°)	0.050 0.098 0.193 0.294	0.127 [P&G] 0.275 0.599 0.958	0.111 0.257 0.600 1.016	0.115 0.252 0.552 0.898	0.125 0.267 0.567 0.920 (0.926)	
2.000 (26.6°)	0.113 0.195 0.29 0.41 0.50	0.27 [Φ] 0.49 0.79 1.17 1.49	0.262 0.519 0.852 1.314 1.683	0.284 0.526 0.825 1.220 1.530	0.278 0.497 0.774 1.142 1.416 (1.422)	
1.000 (45°)	0.113 0.195 0.29 0.41 0.50	0.24 [Φ] 0.44 0.70 1.03 1.30	0.185 0.367 0.602 0.929 1.190	- - - - -	0.236 0.395 0.574 0.795 0.951 (0.953)	
1.000 (45°)	0.060 0.100 0.200 0.480	0.126 [H&X] 0.216 0.451 1.249	0.084 0.159 0.379 1.131	0.115 0.212 0.454 1.270	0.125 0.209 0.404 0.916	

Таблица. Сравнение данных по накату. H&H: Heitner & Housner (1970); KLL: Kim, Liu & Liggett (1983); P&G: Pedersen & Gjevick (1983); Φ: Франк (1989); H&X: Новикова & Хакимзянов (1990); S: Sympolakis (1987); H&W: интерполяция экспериментов (Hall & Watts 1953) Последний столбец в скобках - результаты расчета при вдвое меньших значениях  $\tau$  и  $h$ .

источником давления, движущимся с постоянной критической скоростью. Здесь обнаружен интересный эффект, заключающийся в том, что в случае области разрежения, при некоторых значениях полуширины источника возникает новый периодический режим, когда источник не генерирует вперед солитоны.

Четвертая глава посвящена построению и исследованию дискретных моделей для описания трехмерных волн, а также их приложению к чис-

ленному моделированию маховского отражения уединенных волн. В параграфе 4.1 описана трехмерная модель на регулярной сетке (модель 1). Модель похожа на двумерную из второй главы с той лишь разницей, что из-за трехмерности в качестве ячеек сетки здесь используются неправильные додекаэдры.

В параграфе 4.2 строится двумерная (в плане) модель мелкой воды (модель 2), являющаяся обобщением одномерной модели третьей главы. Получены предельные уравнения при  $h_1, h_2 \rightarrow 0$ .

Параграф 4.3 посвящен численному моделированию маховских конфигураций. Известно, что при накате уединенной поверхностной волны на вертикальную стенку, расположенную под углом к фронту волны, возможно как регулярное отражение, когда наблюдаются только две волны - падающая и отраженная, причем углы и амплитуды этих волн одинаковы, так и отражение Маха, когда возникает тройная несимметричная конфигурация. Существующие здесь теоретические результаты и данные экспериментальных измерений во многом расходятся, даже качественно. Для выяснения причин этого расхождения были проведены достаточно подробные численные эксперименты.

Прежде всего обе модели были опробованы на задаче о бегущем над ровным дном солитоне. Расчеты показали, что, здесь, как и в случае дискретных моделей меньшей размерности, даже на достаточно грубой сетке реализуются уединенные волны, которые в силу консервативности дискретной модели и численного алгоритма распространяются с постоянной средней амплитудой, энергией и фазовой скоростью.

В качестве следующего этапа моделировался эксперимент (Melville W.K.//JFM,1980,v.98), в котором исследована начальная стадия отражения уединенных волн от косої стенки. В эксперименте эта стенка примыкала под изменяемым углом к боковой стенке бассейна на некотором расстоянии от волнопродуктора. В численных расчетах была повторена схема эксперимента в части, касающейся геометрии бассейна (кроме начального участка с волнопродуктором), расстановки датчиков уровня жидкости и обработки результатов. Отличие заключалось только в генерации начальной волны, которая здесь просто задавалась на входном участке в качестве начальных данных. Результаты расчетов по обеим моделям неплохо согласуются между собой и с данными экспериментов.

Следующая большая серия расчетов посвящена исследованию эволюции конфигурации волн во времени вплоть до установления углов и амплитуд волн. На рис. 6 приведен пример развития во времени трой-

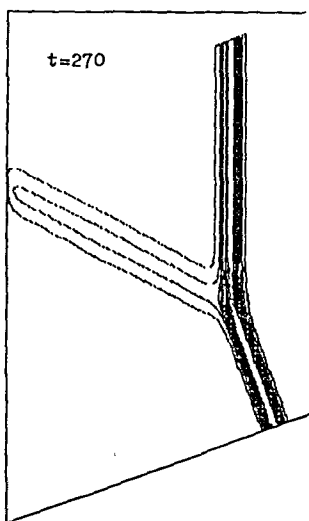
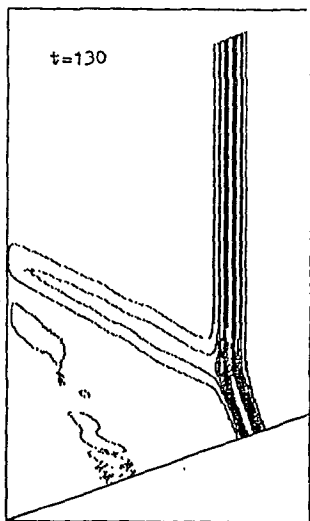
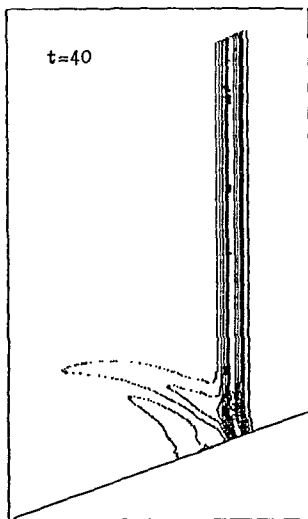
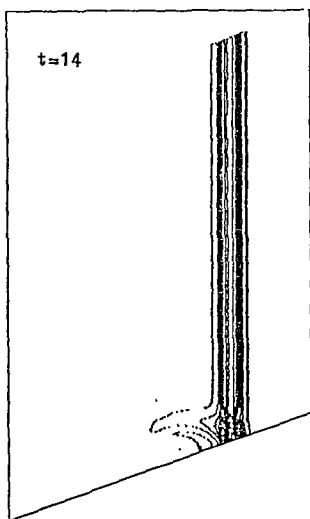


рис. 6

ной маховской конфигурации.

Основными задачами в этой серии было сопоставление результатов для малых амплитуд волн с теорией Майлса (Miles J.W.//JFM,1977, v.79), а также получение количественных зависимостей для амплитуды волны на стенке  $a_w$ , амплитуды отраженной волны  $a_r$  и угла отражения  $\psi_r$  от амплитуды падающей волны  $a_1$  и угла падения  $\psi_1$ . Отнесенная к глубине безразмерная амплитуда падающей волны изменялась от 0.05 до 0.3. При  $a_1 = 0.05$  результаты расчетов зависимости угла отражения от угла падения для обоих типов отражения хорошо согласуются с теоретическими. При больших амплитудах теория дает завышенное значение угла отражения, хотя и для  $a_1 = 0.097$  теоретическая оценка угла отражения еще вполне приемлема. Более сильная нелинейность приводит также к характерной немонотонной зависимости угла отражения от угла падения.

На рис.7 приведены рассчитанные зависимости амплитуд отражен-

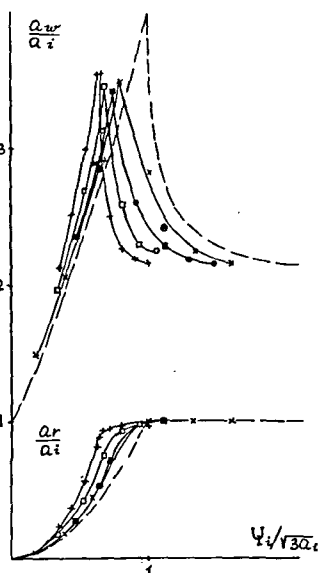


рис. 7

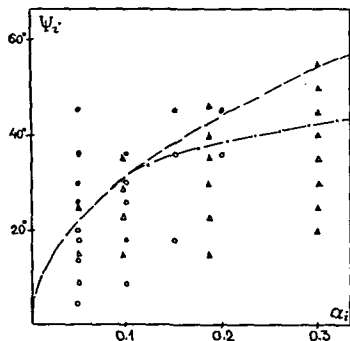


рис. 8

ной волны  $a_r$  и ножки Маха на стенке  $a_w$ , отнесенные к  $a_1$ , в зависимости от переменной  $\psi_1/\sqrt{3a_1}$ . Для модели 1 значения  $a_1$  соответствуют:  $\bullet, 0.097$ ;  $\circ, 0.186$ . Для модели 2  $a_1$ :  $\odot, 0.05$ ;  $\blacksquare, 0.097$ ;  $\square, 0.186$ ;

+0.3. Здесь же значками \* приведены результаты расчетов Funakoshi M.//J.Phys.Soc.Japan,1980,т.49,№6 для  $a_1 = 0.05$ . Пунктиром изображены универсальные в этих переменных теоретические зависимости Майлса. Из приведенных результатов видно, что увеличение нелинейности хотя и приводит к заметному количественному отклонению от универсальных зависимостей Майлса, но качественный характер остается.

Наиболее интересен здесь эффект резонансного усиления амплитуды волны на стенке, которая в расчетах достигает значения  $3.5a_1$ . Здесь надо отметить, что поскольку пики очень острые, не исключено, что при малых амплитудах в расчетах получены не самые большие значения. Тем не менее значение  $3.5a_1$  значительно превышает величину максимального заплеска волны при обычном накате на вертикальную стенку под прямым углом, которая, для рассматриваемых значений амплитуд, как известно, практически совпадает с результатом линейной теории  $2a_1$ . В экспериментах для тройных конфигураций отношение  $a_w/a_1$  не превышало 2. Причиной отсутствия наблюдения резонансного усиления, наиболее вероятно, является то обстоятельство, что судя по настоящим расчетам, тройная конфигурация с максимальной амплитудой ножки Маха устанавливается дольше всех остальных и это время, в зависимости от амплитуды, составляет 500 и более безразмерных единиц. За это время падающая волна проходит более 500 глубин, что вряд-ли возможно реализовать в лабораторных условиях. С другой стороны, в натуральных условиях такое соотношение масштабов вполне реально, так что предсказанный Майлсом эффект резонансного усиления при накате волны на берег под углом может иметь и практический интерес, скажем в связи с волнами цунами.

Зависимость амплитуды отраженной волны  $a_r$  от угла падения для тройной конфигурации также качественно, а при малых амплитудах и количественно, близка к квадратичной зависимости Майлса  $a_r = \psi_1^2/3$ , хотя и  $\psi$  некоторым зависящим от амплитуды коэффициентом. Например, при  $a_1 = 0.3$  расчетные точки хорошо ложатся на кривую  $a_r = 0.62\psi_1^2$ .

На рис.8 приведена диаграмма в плоскости параметров  $a_1, \psi_1$  из работы Funakoshi, дополненная настоящими расчетами. Светлые значки  $\circ, \Delta$  соответствуют случаю нерегулярного, а темные  $\bullet, \blacktriangle$  - регулярного отражения ( $\circ, \bullet$  данные Funakoshi;  $\Delta, \blacktriangle$  настоящая работа). В настоящей работе отражение считалось нерегулярным, если установившееся значение  $a_r$  было меньше  $0.95a_1$ . Здесь же пунктиром приведена теоретическая кривая (Miles 1977) для критического угла, разделяющего

два типа отражения  $\psi_1^* = \sqrt{3}a_1$ . Видно, что для амплитуд  $a_1 < 0.1$  совпадение с теорией хорошее. При больших  $a_1$  показанная штрих-пунктиром кривая лучше соответствует результатам расчетов. Эта зависимость растет существенно медленнее квадратного корня и для умеренных амплитуд дает величины критического угла, похожие на описанные в литературе экспериментальные данные Чена и Перрауда, в которых были получены значения  $40^\circ$  и  $45^\circ$ , соответственно, причем у Перрауда эта оценка получилась не зависящей от  $a_1$ .

В качестве основных итогов проведенного исследования, можно отметить, во-первых, что получено неплохое совпадение с экспериментами Melville (1980), моделирующими начальную стадию развития маховских конфигураций для волн конечной амплитуды. Во-вторых, на больших временах для волн малой амплитуды получено неплохое согласие с теорией Майлса. Все это дает определенные основания надеяться, что численная модель адекватно описывает явление и в промежуточной области параметров, в которой применимость теории Майлса изначально сомнительна, а постановка хорошего эксперимента очень затруднительна по причинам, описанным выше.

Далее, численные расчеты дают основу для понимания причин расхождения теории и экспериментов, а точнее дополнительные аргументы в пользу применимости асимптотической теории Майлса к описанию маховского отражения уединенных волн при небольших амплитудах. Наиболее интересен здесь предсказанный теоретически, и подтвержденный в расчетах для волн конечной амплитуды, эффект резонансного усиления волны на стенке.

**Пятая глава** посвящена свободно-лагранжевым дискретным моделям. Описанные в предыдущих главах модели обладают одним общим недостатком, характерным вообще для лагранжевых методов. Они работоспособны только для течений с относительно небольшими деформациями среды, как, например, описанные выше волновые движения. В случае течений с интенсивной завихренностью неизбежно возникает перехлест сетки и авост. Для преодоления этого недостатка естественно попытаться построить дискретные модели, в которых отношение соседства частиц не фиксировано и может со временем изменяться. То есть частицы, бывшие соседями в начальный момент времени, должны иметь возможность со временем расходиться сколь угодно далеко. Ясно, что основная проблема здесь - это способ введения дискретного условия несжимаемости, которое бы допускало такое движение. В главе рассмотрены три примера таких моделей.

Первая "бессеточная" модель состоит из "частиц", каждая из которых представляет собой малый, но конечный объем, например шар, заполненный какой-то средой. Частицы могут пересекаться, т.е. одна и та же точка физического пространства может одновременно принадлежать нескольким частицам. Считается, что плотность среды в этой точке равна сумме плотностей сред частиц, ее содержащих. В качестве условия несжимаемости требуется постоянство массы среды в конечном числе контрольных объемов, покрывающих расчетную область. Эти объемы также могут пересекаться друг с другом. Такое условие несжимаемости порождает голономные связи между частицами. Модель апробирована на задачах со свободной границей, имеющих точные решения. Проведено моделирование возникновения стохастического режима с неслучайных начальных данных.

В параграфе 5.2 строится и численно исследуется на тестовых задачах модель, использующая сетку Дирихле. Идея использования такой сетки для расчета гидродинамических задач в лагранжевых координатах, по-видимому, впервые предложена в методе "Медуза" (И.Д.Софронов и др. 1972). Привлекательность сетки Дирихле обусловлена тем, что в ней не фиксировано отношение соседства между точками, в отличие от регулярных сеток. В результате, при расчете задач с большими деформациями на такой сетке в принципе не возникает явления "перехлеста" ячеек. Кроме того, к достоинствам сетки Дирихле следует отнести выпуклость ячеек и гладкую зависимость площадей ячеек от координат точек.

Построение сетки Дирихле само по себе является не слишком простой задачей требующей специального рассмотрения. Существуют универсальные индуктивные алгоритмы, позволяющие строить сетку Дирихле для произвольного набора точек в областях не слишком сложной формы. Однако эти алгоритмы требуют большого количества операций и, поэтому, неэкономичны при построении сетки на каждом временном шаге, как того требуют лагранжевы методы. Поэтому здесь был разработан экономичный алгоритм, основанный на локальных перестройках.

Из результатов второго параграфа следует, что нелагранжевость движения ячеек Дирихле приводит к существенной потере качества расчетов. С другой стороны, если все узлы сетки движутся чисто лагранжево, т.е. со скоростью среды - это неминуемо приводит в общем случае к перехлесту сетки. Дискретная модель параграфа 5.3 в известном смысле устраняет это противоречие. Эта модель позволяет узлам многоугольной сетки двигаться "почти лагранжево", т.е. как можно ближе

к истинной скорости среды, и в то же время так, чтобы не возникало перехлеста. То есть допускается добавление к лагранжевой скорости узла некоторой управляющей скорости. При этом возможна смена соседства частиц аналогично описанному в § 5.2 процессу парных перестроек. Добавление управления приводит к необходимости учитывать потоки массы, импульса и энергии между ячейками. Для этого в уравнения Лагранжа добавляется энергетически нейтральный конвективный член. Приведены расчеты задачи о прохождении уединенной волны над уступом дна.

В шестой главе изложен несколько иной подход к построению дискретных моделей несжимаемой жидкости. Все описанные в предыдущих главах модели строились на основе принципа Гамильтона. При этом, ключевым моментом является построение дискретного условия несжимаемости, которое в сущности и определяет способ пространственной дискретизации. Каждый из рассмотренных выше типов условий имеет свои достоинства и недостатки. Проблема заключается в том, что здесь в рамках чисто лагранжевых моделей не удается найти более или менее универсальный вид такого условия несжимаемости, которые бы, с одной стороны хорошо работало на гладких течениях с небольшими деформациями, типа описанных выше волновых движений, а с другой – позволило бы рассчитывать выход волны на берег, ее обрушение и т.д.

В данной главе изложен другой подход, в основе которого лежит другой вариационный принцип – наименьшего принуждения Гаусса. При этом появляется возможность вернуться к идее системы свободных частиц, не связанных никакой сеткой, а несжимаемость учесть с помощью проектирования скоростей частиц на ближайшее гладкое соленоидальное поле. Это позволяет с малыми затратами получать гладкие численные решения в области гладких течений, а в областях с большими деформациями не заботиться о проблемах перехлеста.

Рассмотрим некоторый объем  $V$  идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести  $F = \rho g$ ,  $g = (0, 0, -1)$ , граничащий с жесткой стенкой  $\gamma$  и имеющий участок свободной границы. Пусть  $q$  обозначает лагранжевы,  $r(t, q)$  – эйлеровы координаты жидких частиц, тогда согласно принципу Гаусса в каждый момент времени  $t$  система будет двигаться таким образом, чтобы минимизировать функционал

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} \int_V \rho \left[ r \Big|_t^{t+\Delta t} - r^0 \Big|_t^{t+\Delta t} \right]^2 dq. \quad (15)$$



Здесь  $\gamma|_t^{t+\Delta t}$  — действительное смещение жидких частиц за время  $\Delta t$ , т.е. смещение, совместимое с наложенными ограничениями, в данном случае с условием несжимаемости и граничным условием

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u_n|_\gamma = 0, \quad (16)$$

а  $\gamma|_t^{t+\Delta t}$  — смещение при свободном движении материальных точек под действием внешней силы.

Таким образом, принцип Гаусса постулирует, что из всех возможных в силу связей движений система выбирает то, которое наиболее близко к свободному.

Из (15)–(16) нетрудно получить другую формулировку принципа Гаусса

$$S = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \dot{u} - \frac{F}{\rho} \right)^2 dq \longrightarrow \min \quad (17)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (18)$$

$$u_n|_\gamma = 0 \quad (19)$$

Варьирование (17) дает

$$\delta S = \int_V (\rho \dot{u} - F) v dq = \int_V (\rho \dot{u} - F) v dr = 0 \quad (20)$$

для произвольной соленоидальной функции  $v$ , удовлетворяющей условию непротекания. Легко видеть, что уравнения (18)–(20) представляют собой обобщенную постановку соответствующей краевой задачи для уравнений Эйлера.

Для построения дискретной модели в начальный момент времени  $t = 0$  аппроксимируем объем  $V$  конечной системой материальных частиц с координатами  $\gamma_k$ , массами  $m_k$  и скоростями  $u_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Это всегда можно сделать, используя какую-либо сетку, в том числе и нерегулярную. Обозначим шаг по времени  $\tau$ ,  $\gamma_k^n = \gamma_k(n\tau)$ ,  $u_k^n = u_k(n\tau)$ . Аппроксимируем задачу (17)–(19) следующей конечномерной задачей

$$S^n = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left( \frac{\tilde{u}_k - u_k^n}{\tau} - g \right)^2 \longrightarrow \min$$

$$\operatorname{div} \tilde{u} = 0 \quad (21)$$

$$\tilde{u}_n|_{\gamma} = 0$$

Здесь  $\tilde{u}_k = \tilde{u}(r_k^{n+1})$ , где  $\tilde{u}$  принадлежит некоторому конечномерному пространству  $N$  гладких соленоидальных функций, удовлетворяющих граничному условию (19). Физический и геометрический смысл задачи (21) можно пояснить с помощью метода расщепления. Пусть  $a, b \in \underbrace{R^3 \times \dots \times R^3}_N$

, тогда положим по определению

$$(a, b) = \sum_{k=1}^N m_k a_k b_k, \quad \|a\|^2 = (a, a).$$

Расщепим задачу (21) на два дробных шага:

$$\begin{aligned} 1\text{-й:} \quad r_k^{n+1} &= r_k^n + \tau u_k^n \\ u_k^{n+1/2} &= u_k^n + \tau g, \end{aligned} \quad (22)$$

2-й: Найти  $\tilde{u} \in N$  такую, что

$$\|u^{n+1} - u^{n+1/2}\| \rightarrow \min, \quad (23)$$

где  $u^{n+1} = (\tilde{u}(r_1^{n+1}), \dots, \tilde{u}(r_N^{n+1}))$ .

Видно, что первый дробный шаг представляет собой свободное движение частиц в поле внешней силы, а второй является проектированием в  $L_2$  предварительно найденных скоростей  $u_k^{n+1/2}$  на ближайшее соленоидальное поле из  $N$ . Такая процедура, восходящая к работам Чорина и Темана, хорошо известна в численных методах для несжимаемой жидкости.

Основное отличие способа проектирования здесь, помимо лагранжевого подхода, состоит в следующем. Обычно в качестве  $N$  выбирается пространство сеточных, а не гладких функций, и для проектирования строится некоторая скалярная функция (давление), градиент которой ортогонален  $N$ . Для сохранения энергии оператор GRAD обычно старается выбрать согласованным с оператором DIV. В описанных выше дискретных моделях имеет место именно такое проектирование, причем согласование операторов получается автоматически вследствие исполь-

зования принципа Гамильтона. На регулярных сетках эти операторы получаются достаточно хорошими, но класс решаемых задач довольно ограничен. Переход же к нерегулярным сеткам ухудшает аппроксимационные свойства операторов. Таким образом, основная проблема при этом способе проектирования заключается в построении дискретных операторов DIV и GRAD, которые бы, с одной стороны, не ухудшали гладкость хороших решений  $\mathbf{a}$ , с другой, хотя бы в принципе позволяли рассчитывать сложные течения типа отрыва, разрушения структур, обрушения волн и т.д.

В постановке (21) нет необходимости строить сеточные аналоги каких-либо дифференциальных операторов. Вместо нахождения давления непосредственно строится пространство  $N$  и находится функция  $\tilde{u}$  из условия (23). В качестве базиса пространства  $N$  можно, например, взять линейно-независимую систему функций  $\mathbf{v}_1 = \text{rot } \Phi_1$ , где  $\Phi_1$  - гладкие функции, обращающиеся в ноль на  $\gamma$ . Варьирование (21) приводит к системе линейных уравнений относительно коэффициентов разложения искомой функции  $\tilde{u}$  по базису пространства  $N$ . После нахождения соленоидального поля  $\tilde{u}$  вычисляются новые значения скоростей частиц.

Можно показать, что простейшая дискретизация по времени (21) приводит к диссипативной схеме. В диссертации, по аналогии с § 1.2, строится полностью консервативная схема, требующая практически того же объема вычислений на один шаг по времени, что и схема (21).

Во втором параграфе главы получены необходимые и достаточные условия на пространство  $N$ , при которых тождественно выполняются основные законы сохранения. Простым следствием этих утверждений является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для выполнения законов сохранения энергии, импульса и момента импульса достаточно, чтобы  $N$  содержало пространство соленоидальных многочленов первой степени.*

Отметим одно важное достоинство модели. Поскольку все вычисляемые величины сосредоточены в частицах, а законы сохранения имеют место для любого пространства  $N$ , удовлетворяющего условию предложения 4, это пространство, в принципе, можно менять от шага к шагу, улучшая разрешение, подстраиваясь под возникающие в процессе расчета особенности решения и т.д. При этом гарантируется выполнение законов сохранения и не возникает необходимости в какой-бы то ни было переинтерполяции величин.

В третьем параграфе описано применение данной модели к расчету задач со свободной границей. В качестве тестовых здесь рассмотрены

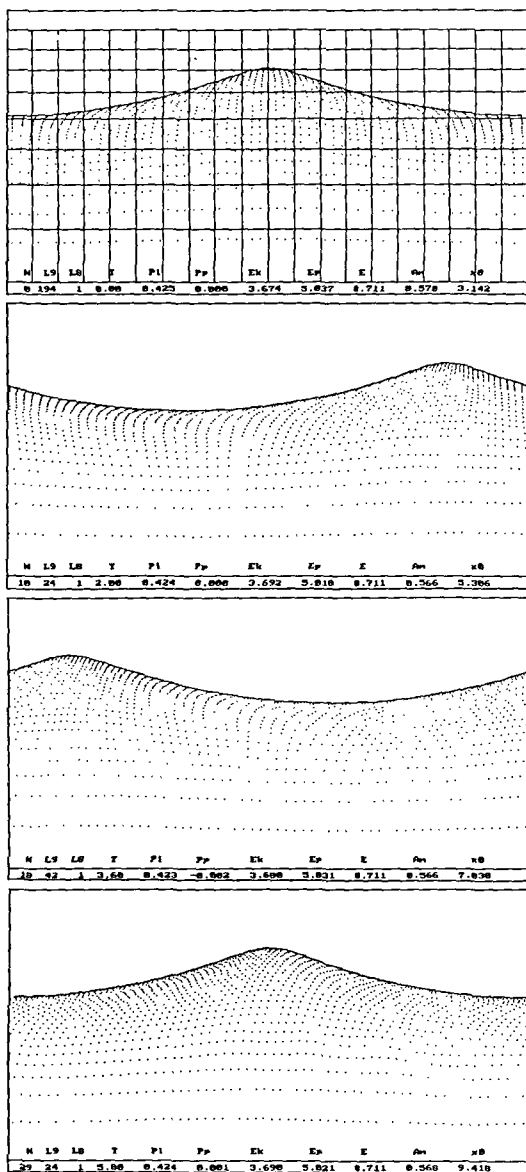
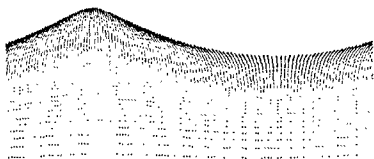


рис. 9

$t = 0$



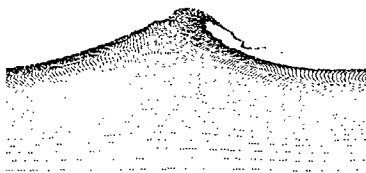
$t = 6.2$



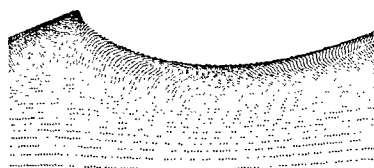
$t = 3.2$



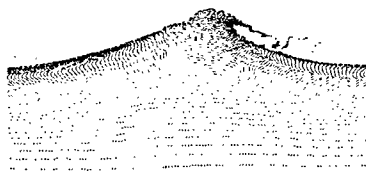
$t = 6.8$



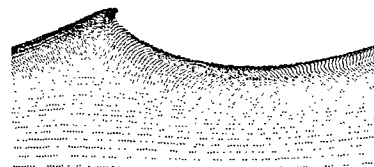
$t = 5.0$



$t = 7.2$



$t = 5.4$



$t = 7.4$

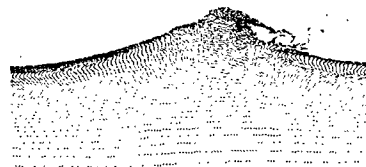


рис. 10

- 27 -

задачи: о деформации жидкого эллипса со свободной границей, бегущие уединенные и периодические волны. На этих задачах метод показал очень хорошие результаты. На рис. 9 приведен пример расчета бегущих периодических волн большой амплитуды. Сплошной кривой показано положение свободной границы вычисленное с большой точностью из решения Schwartz L.W. // J. Fluid Mech., 1974, v. 62. В качестве более сложной задачи проведено моделирование обрушения таких волн вследствие возмущения начального поля скорости, а также под действием нестационарного источника давления. На рис. 10 приведен пример такого расчета.

#### Основные результаты.

1. Предложена общая схема построения различных дискретных моделей несжимаемой жидкости. Разработан единый метод их численной реализации.

2. Построена дискретная модель несжимаемой жидкости на регулярной сетке для расчета плоских поверхностных волн. На примере бесконечного слоя со свободной границей показана связь дискретной модели с классической краевой задачей. Найден точный закон дисперсии модели для линейных волн. Проведено численное моделирование уединенных волн, их наката на вертикальную и наклонную стенку. Показано, что кинематические и динамические характеристики наката волн хорошо совпадают с экспериментальными данными уже при небольшом числе степеней свободы дискретной модели. Проведены расчеты воздействия периодических волн на волнозащитные сооружения сложной конфигурации.

3. Построена одномерная нелинейно-дисперсионная дискретная модель мелкой воды. Исследованы ее дисперсионные свойства. Показано, что в случае ровного дна при увеличении числа степеней свободы модель переходит в пределе в уравнения Green & Naghdí (1976). В рамках данной модели проведены расчеты наката уединенных волн на пологий откос в широком диапазоне углов наклона и амплитуд волн. Результаты хорошо согласуются с данными экспериментов и расчетов других авторов. Тем самым показано, что данная модель может использоваться для расчета распространения и наката на берег длинных волн. Проведены численные эксперименты по генерации волн движущимся источником давления. Получен новый режим, когда источник определенной формы, движущийся с критической скоростью, не генерирует вперед солитоны.

4. Построены две дискретные модели для описания трехмерных волн.

Проведено численное моделирование отражения Маха для уединенных волн. Найдены количественные зависимости для параметров тройной конфигурации, неплохо совпадающие для малых амплитуд волн с результатами теории (Miles 1977), а для умеренных амплитуд и небольших времен с результатами экспериментов (Melville 1980). Для волн конечной амплитуды получено резонансное усиление волны на стенке, предсказанное теорией для волн малой амплитуды. Проведенные исследования позволяют объяснить причину расхождения результатов теории и экспериментов.

5. Предложено и опробовано несколько способов построения свободно-лагранжевых дискретных моделей на основе принципа Гамильтона. В результате исследований построена дискретная модель с частицами переменной массы для расчета течений с большими деформациями.

6. Построен новый полностью консервативный свободно-лагранжев метод частиц для моделирования сложных течений несжимаемой жидкости со свободной границей.

#### Основные публикации по теме диссертации.

1. Франк А.М., Яненко Н.Н. Дискретная модель несжимаемой жидкости// Применение ЭВМ в моделировании задач математической физики. Красноярск: ВЦ СОАН СССР, 1985, с.133-144.
2. Frank A.M., Pautov V.N. On discrete model of inviscid incompressible fluid//Proc. Seminar on Ship Hydrodynamics, BSHC, Varna, 6-11 Oct.1986, vol.1, pp.17.1-17.5.
3. Франк А.М. Двумерное стохастическое решение для дискретной модели несжимаемой жидкости// Математические модели и методы решения задач механики сплошной среды. Красноярск: ВЦ СОАН СССР, 1986, с.113-117.
4. Паутов В.Н., Франк А.М. Алгоритм построения ячеек Дирихле для задач со свободными границами// Математические модели и методы решения задач механики сплошной среды. Красноярск: ВЦ СОАН СССР, 1986, с.113-117.
5. Франк А.М. Полностью консервативный численный алгоритм для дискретных моделей несжимаемой жидкости// Моделирование в механике. Новосибирск, 1987, т.1 (18), №5, с.134-144.
6. Паутов В.Н., Франк А.М., Шарая И.А. О методике расчета движения несжимаемой жидкости со свободной границей на сетке Дирихле: Препринт №16, ВЦ СОАН СССР, 1987, 33с.
7. Паутов В.Н., Франк А.М. Алгоритм построения сетки Дирихле для нестационарных задач на основе локальных перестроек// ЖВМиМФ, 1988,

т.28, №11, с.1730-1734.

8. Франк А.М. Численное моделирование уединенных поверхностных волн в рамках дискретной модели несжимаемой жидкости// ПМТФ, 1989, №3, с.95-101.

9. Frank A.M. Numerical simulation of solitary surface waves by discrete incompressible fluid model//Proc. USSR-Japan Symp. CFD, Khabarovsk, 9-16 Sept. 1988, М.: ВЦ АН СССР, 1989, т.3, с.122-128.

10. Паутов В.Н., Франк А.М. Дискретная модель несжимаемой жидкости с частицами переменной массы// Труды Всесоюз. совещ. по числ. мет. волн. гидродин. (Ростов-на-Дону, 1990), Красноярск: ВЦ СОАН СССР, 1991, с.80-86.

11. Франк А.М., Огородников Е.И. Консервативный свободно-лагранжев метод для несжимаемой жидкости// ДЕП ВИНИТИ 01.07.92 №2123-В92.

12. Франк А.М., Огородников Е.И. Метод частиц для несжимаемой жидкости// ДАН, 1992, т.326, №6, с.958-962.

13. Серебрянникова О.А., Франк А.М. Численное моделирование отражения Маха для уединенных волн// ПМТФ, 1993, №5, с.15-24.

14. Франк А.М. Дискретная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды// ПМТФ, 1994, №1, с.34-42.





Проведено численное моделирование отражения Маха для уединенных волн. Найдены количественные зависимости для параметров тройной конфигурации, неплохо совпадающие для малых амплитуд волн с результатами теории (Miles 1977), а для умеренных амплитуд и небольших времен с результатами экспериментов (Melville 1980). Для волн конечной амплитуды получено резонансное усиление волны на стенке, предсказанное теорией для волн малой амплитуды. Проведенные исследования позволяют объяснить причину расхождения результатов теории и экспериментов.

5. Предложено и опробовано несколько способов построения свободно-лагранжевых дискретных моделей на основе принципа Гамильтона. В результате исследований построена дискретная модель с частицами переменной массы для расчета течений с большими деформациями.

6. Построен новый полностью консервативный свободно-лагранжев метод частиц для моделирования сложных течений несжимаемой жидкости со свободной границей.

#### Основные публикации по теме диссертации.

1. Франк А.М., Яненко Н.Н. Дискретная модель несжимаемой жидкости// Применение ЭВМ в моделировании задач математической физики. Красноярск: ВЦ СОАН СССР, 1985, с.133-144.
2. Frank A.M., Pautov V.N. On discrete model of inviscid incompressible fluid//Proc. Seminar on Ship Hydrodynamics,BSHC, Varna,6-11 Oct.1986,vol.1,pp.17.1-17.5.
3. Франк А.М. Двумерное стохастическое решение для дискретной модели несжимаемой жидкости// Математические модели и методы решения задач механики сплошной среды.Красноярск:ВЦ СОАН СССР,1986, с.113-117.
4. Паутов В.Н., Франк А.М. Алгоритм построения ячеек Дирихле для задач со свободными границами// Математические модели и методы решения задач механики сплошной среды.Красноярск:ВЦ СОАН СССР,1986, с.113-117.
5. Франк А.М. Полностью консервативный численный алгоритм для дискретных моделей несжимаемой жидкости// Моделирование в механике. Новосибирск, 1987, т.1(18), №5, с.134-144.
6. Паутов В.Н., Франк А.М., Шарая И.А. О методике расчета движения несжимаемой жидкости со свободной границей на сетке Дирихле: Препринт №16, ВЦ СОАН СССР, 1987, 33с.
7. Паутов В.Н., Франк А.М. Алгоритм построения сетки Дирихле для нестационарных задач на основе локальных перестроек// ЖВМиМФ, 1988,

т.28, №11, с.1730-1734.

8. Франк А.М. Численное моделирование уединенных поверхностных волн в рамках дискретной модели несжимаемой жидкости// ПМТФ, 1989, №3, с.95-101.

9. Frank A.M. Numerical simulation of solitary surface waves by discrete incompressible fluid model//Proc. USSR-Japan Symp. CFD, Khabarovsk, 9-16 Sept. 1988, М.: ВЦ АН СССР, 1989, т.3, с.122-128.

10. Паутов В.Н., Франк А.М. Дискретная модель несжимаемой жидкости с частицами переменной массы// Труды Всесоюз. совещ. по числ. мет. волн. гидродин. (Ростов-на-Дону, 1990), Красноярск: ВЦ СОАН СССР, 1991, с.80-86.

11. Франк А.М., Огородников Е.И. Консервативный свободно-лагранжев метод для несжимаемой жидкости// ДЕП ВИНТИ 01.07.92 №2123-В92.

12. Франк А.М., Огородников Е.И. Метод частиц для несжимаемой жидкости// ДАН, 1992, т.326, №6, с.958-962.

13. Серебренникова О.А., Франк А.М. Численное моделирование отражения Маха для уединенных волн// ПМТФ, 1993, №5, с.15-24.

14. Франк А.М. Дискретная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды// ПМТФ, 1994, №1, с.34-42.

