РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

ЛИСЕЙКИН Владимир Дмитриевич

УДК 519.6

МЕТОДЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ АДАПТИВНЫХ СЕТОК

01.01.07. – Вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 1992

Работа выполнена в Институте вычислительных технологий Сибирского отделения РАН.

Официальные оппоненты:

д.ф.-м.н., профессор В.П.Ильин

д.ф.-м.н., профессор В.Ф.Куропатенко

д.ф.-м.н. Г.П.Прокопов

Ведущая организация: Институт математики и механики Ур.Н.Ц. РАН

Защита состоится "17" февраля 1993 года в 10 часов на заседании специализированного совета Д 002.10.01 при Вычислительном центре СО РАН (630090, г.Новосибирск, пр-т Акад.Лаврентьева, 6).

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки ВЦ СО РАН.

Автореферат разослан "5" января 1993 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
д.ф.-м.н. Ю.И.Кузнецов

Актуальность проблемы. Возрастающие требования науки и техники в исследовании реальных физических процессов ставят проблему создания надежных и эффективных численных алгоритмов, позволяющих решать сложные пространственные задачи математической физики. Разностная сетка, являясь одним из ключевых элементов алгоритма, играет важную роль в увеличении эффективности численных расчетов. Эта роль особенно ярко проявляется при исследовании задач с резкими изменениями или большими градиентами решений в узких зонах: пограничных и внутренних (переходных) слоях. Для решения таких задач необходимы методы конструирования адаптивных сеток со сгущающимися узлами. Сгущение узлов в зонах больших градиентов уменьшает осцилляции, искусственную вязкость и погрешность численного алгоритма, также позволяет получать детальную картину решения в слоях и дает возможность находить его на доступном числе узлов сетки. Эти возможности адаптивных сеток и ставят проблему их конструирования в качестве одной из актуальных задач вычислительной математики.

Цель работы состоит в исследовании качественных свойств решений уравнений с пограничными и внутренними слоями и в разработке и обосновании методов построения адаптивных сеток для численного решения задач математической физики.

Научная новизна и практическая ценность. Исследованы качественные свойства решений двухточечных бисингулярных задач с малым параметром. Получены оценки производных, позволяющие в явном виде определять преобразования независимой переменной, устраняющие особенности задач с малым параметром, входящим в коэффициенты перед старшими производными. На основе этих преобразований сконструированы адаптивные сетки методом растяжения. Теоретическими методами исследована сходимость схем с направленными разностями решения некоторых бисингулярных задач на таких сетках. Разработаны вариационные методы построения многомерных адаптивных сеток на основе функционалов: 1)погрешности, 2)адаптации, 3)регулярности.

Практическая ценность полученных теоретических результатов и разработанных методов построения адаптивных сеток состоит в том, что они позволяют:

1)делать вывод о качественной структуре и положении слоев решения некоторых бисингулярных задач на основе анализа их инвариантов;

2)задавать начальное приближение при решении уравнений с малым параметром методом итераций;

3)конструировать адаптивные сетки методом растяжения для численного решения задач с малым параметром, входящим в коэффициенты перед старшими производными;

4)получать единым методом невырожденные адаптивные сетки для областей и их границ.

Автор защищает:

-теоретические исследования качественной структуры бисингулярных задач с малым параметром;

-разработка и обоснование метода растяжения для численного решения задач с малым параметром при старшей производной;

-разработка и обоснование вариационных методов построения многомерных адаптивных сеток.

Основные результаты работы сформулированы в заключительной части автореферата ("Основные результаты и выводы").

Апробация. Представленные в диссертации результаты в процессе их получения докладывались на семинарах: кафедры вычислительных методов механики сплошных сред Новосибирского государственного университета, кафедры вычислительной математики Московского государственного университета, отделов Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР, Новосибирск, Уральского НИИ математики и механики Уральского отделения АН СССР, Свердловск, Института прикладной математики, Москва, Института математики СО АН СССР, Новосибирск, Института вычислительных технологий. Кроме этого, результаты работы докладывались на 6-ой международной конференции по численным методам в гидродинамике, 1978, Тбилиси, на международной конференции по решению задач с пограничными и внутренними слоями, 1986, Новосибирск, на Всесоюзной конференции "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений", 1987, Дрогобыч, на региональной конференции "Прикладная механика сплошных сред", 1987, Томск, на Всесоюзных конференциях "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики", 1987, 1990, Новосибирск, на советско-японском симпозиуме по вычислительной аэрогидродинамике, 1988, Хабаровск, на Всесоюзном семинаре "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики, 1983, Кемерово и на совещаниях по методам конструирования сеток для задач математической физики, 1990, Свердловск, 1992, Челябинск, на международной конференции "Математические модели и численные методы в механике сплошных сред", 1991, Новосибирск, на третьей региональной конференции "Теория аппроксимации и задачи вычислительной математики", 1991, Новосибирск, на "Всесоюзной конференции по методам численного решения многомерных нестационарных задач математической физики", 1991, Арзамас.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 55 работ, в том числе монография [1] (в соавторстве с В.Е.Петренко). Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 - 38].

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы; содержит 207 стр. машинописного текста, в том числе 17 таблиц и 22 рисунка. Список цитируемой литературы содержит 200 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование актуальности темы диссертации, представлен краткий обзор и анализ методов построения адаптивных сеток для численного решения задач математической физики, а также сформулирована общая характеристика работы и описано краткое содержание глав.

В начале введения показана роль и возможности методов построения адаптивных сеток в улучшении алгоритмов расчета задач с особенностями и со сложной структурой решений. Такие задачи возникают в физике, механике, биологии, химии и других областях науки и техники.

В основном методы конструирования адаптивных сеток направлены на построение сеток со сгущающимися узлами в зонах больших градиентов или погрешностей и в областях медленной сходимости. Сетки, сгущающиеся в зонах больших градиентов, уменьшают численную вязкость и осцилляции, дают возможность получать в них детальную картину течения и обеспечивают приемлемое решение на доступном числе узлов.

Методы адаптации делятся на две группы: I)локальной адаптации, в которых сгущение узлов осуществляется их добавлением, а разрежение - вычеркиванием и 2)глобальной адаптации, в которых одно и то же число узлов перераспределяется в зависимости от свойств решений, полученных аналитически, экспериментально или в процессе численного расчета. Методы локальной адаптации используются при построении неструктурных сеток с узлами, расположенными нерегулярно, а методы глобальной адаптации применяются при конструировании структурных (координатных) сеток, в которых узлы задаются пересечением линий некоторой координатной системы $q = \{q^i\}$, $i=1,2,\dots,n$, определенной преобразованием $x(q)$: $Q^n \to X$, где Q^n - стандартная вычислительная область, а X - физическая область, в которой решается задача.

Основные идеи построения адаптивных сеток были сформулированы как в работах отечественных ученых: Н.С.Бахвалова, С.К.Годунова, Г.П.Прокопова, А.А.Самарского, А.Ф.Сидорова, А.Н.Тихонова, Н.Н.Яненко, так и зарубежных - Д.А.Андерсона, И.Бабушки, Дж.Брэкбилла, Х.А.Дуайера, Д.Моррисона, Дж.С.Салтзмана, Дж.Тэмпсона и П.Р.Эйзимана. Эти работы положили начало созданию серии эффективных методов построения адаптивных сеток: I) - растяжения, 2) - весовых функций, 3) - динамические, 4) - контрольных функций, 5) - вариационные и 6) - проекции.

Далее во введении дано краткое описание этих методов, а в конце компактно изложено содержание диссертации.

<u>В первой главе</u> кратко представлены некоторые общие сведения, терминология и определения, встречающиеся в области конструирования сеток. Здесь описываются существующие классы сеток: структурные, неструктурные, гибридные, их достоинства, недостатки и методы их построения. Более подробно представлено описание технологии построения гибридных сеток, являющихся наиболее перспективными для численных расчетов сложных задач. Далее изложены требования, накладываемые на сетку, методы их

реализации и актуальные проблемы, связанные с созданием алгоритмов построения сеток.

Во второй главе представлены результаты автора по теоретическим исследованиям структуры и положения слоев в задачах с малым параметром, входящим в коэффициенты перед старшими производными. Такие исследования важны для успешного применения адаптивных сеток, построенных по методу растяжения, в решении прикладных задач. Для построения адаптивных сеток в методе растяжения достаточно знать не приближенное решение, а его качественную структуру, учитывающую характерные особенности задачи. Поэтому для такого исследования можно успешно использовать как простые модельные уравнения, в частности одномерные, так и простые теоретические методы. Это утверждение демонстрируется во введении на примере решения задачи движения вязкой жидкости в окрестности границы, качественное исследование которой сводится к изучению обыкновенного уравнения с малым параметром.

Теоретические исследования включают получение оценок производных в основном для обыкновенных бисингулярных уравнений вида:

$$L(u) = -(\varepsilon + px)^{\beta}u'' + a(x,u)u' + f(x,u) = 0 \qquad (1)$$

$$p = 0,1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

и их обобщений на системы и параболические уравнения, в которых особенности появляются как из-за малого параметра ε, так и из-за сингулярностей вырожденного уравнения. Задачи вида (I) возникают при качественном исследовании явлений в газовой динамике и гидродинамике, задачах движения электронов, в биологии, химии и теории полупроводников.

В §I показано, что если выполнено условие $f_u(x,u) \geq c>0$, то решение задачи Дирихле для уравнения (I) имеет равномерно ограниченную по ε вариацию. Это утверждение гарантирует возможность определения новой переменной q, связанной с x преобразованием x(q), относительно которой производные решения задачи равномерно ограничены по ε. Следовательно, скачок решения в соседних узлах сетки, построенной по преобразованию x(q), будет меняться равномерно, и поэтому для решения задач на таких сетках можно использовать обычные схемы.

В §2 подробно исследована задача Дирихле для уравнения (I) при $p = 0$, $a(x,u) = a(x)$, $f_u(x,u) \geq c > 0$. При этих ограничениях рассмотрены все возможные случаи возникновения слоев и приведены оценки производных решения. Новые результаты получены для случаев внутренних и граничных точек поворота. Показано, что n-е производные решения этой задачи мажорируются тремя видами функций:

$$\varphi_1^n(x,x_0,b,\eta) = M(1 + \eta^{-n}\exp(-b|x - x_0|/\eta)) \qquad (2)$$

$$\varphi_2^n(x,x_0,b,\eta) = M(1 + \eta^b/(\eta + |x - x_0|)^{b+n}) \qquad (3)$$

$$\varphi_3^n(x,x_0,b,\eta) = M(1 + (\eta + |x - x_0|)^{b-n}) \qquad (4)$$

$$b > 0,\ \eta = \varepsilon^{\alpha},\ \alpha > 0$$

В частности, выяснено, что если $a(0) = 0$, $a'(0) < 0$, то структура слоя наиболее сложная, зависящая от комбинации двух функций: погранслойной (3) и сингулярной (4).

В §3 представлены оценки производных как задачи Дирихле, так и задачи Неймана для уравнения (I), в котором не выполняется условие $f_u(x,u) > 0$. Рассмотрены примеры задач, возникающих в геодинамике и теории популяций. Также в этом параграфе приведены оценки производных для уравнения первого порядка с точкой поворота.

Результаты для систем обыкновенных уравнений даны в §4. Здесь получены оценки для систем первого порядка с точкой поворота и для систем второго порядка без первой производной.

В §5 подробно исследована задача Дирихле для уравнения (I) при $p = 1$, $a(x,u) = a(x)$, $f_u(x,u) \geq c > 0$. Такие задачи возникают при изучении диффузии электронов или движения жидкости в окрестности кругового выреза. Производные решения этой задачи оцениваются в зависимости от значений β и $a(0)$ функциями (2) - (4), а также функцией:

$$\varphi_4^n(x,x_0,\eta) = M(1 + (\eta + |x - x_0|)^{-n}\ln^{-1}\eta^{-1}) \qquad (5)$$

В §6 приведено обобщение некоторых результатов параграфов 2 и 5 на случай задачи для параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) = 0,$$

с согласованными до первого порядка краевыми условиями, где L - оператор (I).

Изучение структуры слоев решения обыкновенных квазилинейных уравнений второго порядка проводится в §7. Важность таких исследований показана в начале параграфа на примере анализа структуры ударной волны в вязком теплопроводном газе. Потребности качественного анализа такой задачи приводят к простому автономному уравнению вида:

$$-\varepsilon u'' + a(u)u' = 0. \tag{6}$$

Также рассматривается и неавтономное уравнение

$$-\varepsilon u'' + uu' + f(x,u) = 0 \tag{7}$$

В этом параграфе изучены разнообразные случаи возникновения слоев. Показано, что структура и положение слоя решения двухточечной задачи для уравнения (6) определяются краевыми условиями и порядком нуля $a(u)$, а производные оцениваются функциями (2), (3). В частности, обнаружены такие условия, при которых слой является внутренним с разной структурой в левой и правой его части для $\varepsilon > 0$ и неограниченно приближается к границе при $\varepsilon \to 0$, так что предельное решение имеет уже не внутренний слой, а пограничный, т.е. решение предельного уравнения в данном случае не отражает качественной ситуации в задаче с малым параметром (6). Поскольку уравнение (6) моделирует качественную структуру ударной волны, то подобная аномальная ситуация может возникнуть и в задачах движения газа.

Качественное исследование краевой задачи для уравнения (7) проведено для случая $f_u(x,u) \geq c > 0$ и $f(x,0) = 0$. Показано, что первая производная решения оценивается функцией (2) при $n = 1$, и указаны условия, при которых решение может иметь пограничные слои или внутренние, или не иметь слоев.

<u>В третьей главе</u> исследуется метод растяжения в приложении к задачам с малым параметром. Этот метод получил широкое применение при расчетах задач с погранслоями. В методе растяжения сгущающаяся сетка конструируется путем растяжения одного или нескольких семейств координатных линий в зонах больших производных решения (слоях) и сжатия вне таких зон с помощью специальных разделенных преобразований $q^i(x^i)$, $i = 1,\dots,n$, где x^i – физическая координата. Обратные преобразования $x^i(q^i)$ будут сжимающими в слоях и, следовательно, сетка, построенная на основе этих преобразований будет сгущающейся в этих зонах.

Вид преобразования $q^1(x^1)$, растягивающего координату x^1, зависит от качественного поведения решения задачи. Поэтому для эффективного применения метода растяжения при расчетах многомерных задач нужно суметь, предугадать возможную качественную структуру решения в слоях. В главе II было проведено исследование возможных структур слоев в задачах с малым параметром, входящим в коэффициенты перед старшими производными. Результаты этих исследований и используются в главе III для конструирования сгущающихся сеток по методу растяжения.

В §I рассмотрены некоторые свойства функций (2) - (5), являющихся мажорирующими для производных решений задач со слоями, определяемыми малым параметром ε и сингулярностями вырожденных задач. Приведены оценки размеров слоев и соотношений между указанными функциями. В частности, показано, что степенная функция (3) мажорирует экспоненциальную - (2). Таким образом, базисными в оценках производных решений задач с малым параметром являются функции (3), (4) и (5).

Конструирование адаптивных сеток с помощью метода растяжения рассмотрено в §2. Здесь обсуждается базисный принцип построения растягивающего преобразования $q(x)$, который является удобным в теоретических исследованиях решений задач с малым параметром. По этому принципу преобразование $q(x)$ должно быть таким, чтобы решение $u(x)$ относительно переменной q имело равномерно ограниченные производные:

$$\left| \frac{d^k}{dq^k} u(x(q)) \right| \le M \tag{8}$$

где $x(q)$ - функция, обратная $q(x)$, а константа M не зависит от малого параметра ε. Порядок производной k зависит от гладкости задачи и других условий, в частности, от порядка точности схемы. Далее в §2 приведены четыре базисных сжимающих преобразования $x_i(q)$, $i = 1,2,3,4$, полученных на основе мажорирующих функций (2) - (5), одно из которых - известное логарифмическое, а три других - степенные. С помощью этих преобразований, путем склейки их друг с другом в смешанных слоях, а вне слоев - с полиномиальными отображениями, и конструируется функция $x(q)$, обеспечивающая условие (8).

Наиболее удобным и универсальным в практических приложениях является преобразование $x(q)$, полученное с помощью мажорирующей функции (3), которое для части слоя, слева от его центра x_0, имеет вид:

$$x(q) = x_0 - \eta((1 - p(q_0 - q))^{-1/b} - 1), \quad q_- \le q \le q_0 \qquad (9)$$

$$p = (1 - (\eta/(\eta + m\eta^r))^b)/(q_0 - q_-), \quad r = b/(b + 1),$$

$$m > 0, \ b > 0, \ \eta = \varepsilon^{\alpha}$$

или при $b = 1$ в (9):

$$x(q) = x_0 - \eta p(q_0 - q)/(1 - p(q_0 - q)), \quad q_- \le q \le q_0 \qquad (10)$$

Аналогично функция $x(q)$ определяется справа от центра слоя.

Эти преобразования задают закон распределения узлов точек сетки в слое, при этом параметр η определяет степень сгущения узлов в центре слоя, а параметр b в (9) управляет шириной слоя сгущения. В частности, слой расширяется при уменьшении b.

С помощью преобразования (9) устраняются особенности решений задач с малым параметром, производные которых мажорируются функциями (2) и (3), а преобразование (10) устраняет особенности вида (2). Для решений $u(x)$, производные которых оцениваются функциями (4), (5) преобразования (9), (10) хотя полностью и не устраняют особенности вида (4), (5), однако они уменьшают значения производных до величин , приемлемых при расчетах прикладных задач, в которых малые параметры отделены от нуля и не могут быть меньше значений, обусловленных физическими условиями.

Теоретическое обоснование предложенных преобразований для конструирования адаптивных сеток в задачах с малым параметром рассмотрено в §3. Проведено исследование задач на таких сетках для обыкновенных уравнений первого и второго порядков с малым параметром, входящим в коэффициенты перед старшими производными, решение которых имеет пограничные, внутренние, экспоненциальные, степенные и смешанные слои. С этой целью в п.3.1 устанавливается соотношение между погрешностью $R = \{R_i\}$, $i = 1,2,\dots,N$ аппроксимации уравнения и погрешностью $r = \{r_i\}$, $i = 1,2,\dots,N$ численного решения. Показано, в частности, что для решения двухточечной краевой задачи

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + f(x,u) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad (11)$$
$$u(0) = A, \quad u(1) = B$$

при $f_u(x,u) \geq c > 0$ по схеме с направленными разностями на произвольной сетке x_i, $i = 0,1,\ldots,N.$, справедливо соотношение

$$|r_i| \leq M\max|w_i R_i|, \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \qquad (12)$$

где функция w_i равна 1 вне слоев и принимает значение порядка ε в центральной части погранслоя масштаба $\alpha = 1$, т.е. при $\eta = \varepsilon$. Такая ситуация возникает в том случае, когда функция $a(x)$ не обращается в нуль в граничных точках. Соотношение (12) показывает, что уравнение (11) в зоне погранслоя масштаба $\alpha = 1$ можно аппроксимировать более грубо, а именно в ε^{-1} раз менее точно, чем в других точках отрезка. С другой стороны, в п.3.1 показано, что обыкновенное уравнение первого порядка нужно в слое аппроксимировать более точно, чем вне слоя.

Основываясь на полученных соотношениях между погрешностями аппроксимации уравнения и решения, в пп.3.1 и 3.2 проведено исследование сходимости численных алгоритмов решения модельных задач для обыкновенных уравнений первого и второго порядков. В пункте 3.1 доказана равномерная по малому параметру сходимость схемы Эйлера для уравнения первого порядка с точкой поворота и без точки поворота.

Численное решение задач вида (11) рассматривалось в п.3.2. Исследовалось решение (11) по схеме с направленными разностями на неравномерной сетке, построенной на основе преобразований $x(q)$, полученных в §2, и численное решение преобразованного уравнения (11) относительно переменных $u^1(q) = u(x(q))$ и q на равномерной сетке $q_i = ih$.

Доказаны теоремы о равномерной сходимости численного решения на равномерной сетке q_i для преобразованного уравнения. Для решения (11), на неравномерной сетке, равномерная сходимость доказана в том случае, когда задача (11) не имеет погранслоя масштаба $\alpha = 1$. В случае существования таких слоев показано, что погрешность решения равномерно ограничена, если число узлов сетки определяется из соотношения

$$N \geq M \ln \varepsilon^{-1}.$$

Аналогичные утверждения о равномерной сходимости доказываются в §4 и §5 для задачи (II), в которой не выполняется условие $f_u(x,u) \geq c > 0$. В §4 рассмотрена задача, возникающая в геодинамике, а в §5 задача (II) с условием $a(x,u) = 0$, $f(x,u) = xg(x,u)$.

Далее в §6 рассматривается вопрос о сходимости разностной аппроксимации $\varepsilon\frac{du}{dx}$, моделирующей силу трения. Показано, что для задачи (II) с экспоненциальным погранслоем масштаба $\alpha = 1$ эта величина равномерно с точностью $h^{1/2}$ сходится к $\varepsilon\frac{du}{dx}$.

В §7 проведено исследование сходимости на грубой сетке. Показано, что если погранслой настолько узкий, что внутренние узлы сетки расположены достаточно далеко от его центра, то схема с направленными разностями обеспечивает равномерную сходимость решения (II). Для задачи же с внутренним слоем сходимость решения равномерна с точностью $h^{1-\alpha}$ для произвольных сеток.

В конце этого параграфа приведены рекомендации конструирования сеток в двумерных областях для решения эллиптических задач с малым параметром.

Численное обоснование предложенных в §2 сеток для решения задач с малым параметром рассмотрено в §8. В этом параграфе исследуется решение как модельных краевых задач для уравнения вида (I) с разнообразными слоями, так и практических задач: Стокса, Орра-Зоммерфельда, о течении жидкости и о диффузионно-дрейфовом движении электронов. В примерах модельных задач рассматриваются случаи пограничных и внутренних, экспоненциальных, степенных и смешанных слоев с различной структурой как по одну сторону от центра слоя, так и в разных сторонах от его центра, а также случай внутреннего смешанного слоя, неограниченно приближающегося к границе при $\varepsilon \to 0$. Приведенные результаты подтверждают эффективность предложенных сеток, которые удобны в построении и обеспечивают либо равномерную сходимость численного решения, либо близкую к равномерной, а также равномерную интерполяцию на всю область, включая слои.

В главе IV рассматриваются методы конструирования адаптивных сеток на основе вариационных подходов минимизации функционалов регулярности и адаптации. В этих подходах координатное отображение для построения адаптивной сетки является экстремальным для некоторого функционала, сконструированного таким образом, чтобы оптимальное преобразование удовлетворяло требованию адаптации.

Вариационные методы являются перспективными и находят широкое применение при решении сложных задач в силу того, что они дают возможность единообразно сформулировать задачу построения сетки, удовлетворяющей нескольким, часто противоречивым требованиям, например, регулярности и адаптации. Кроме того, такие методы позволяют конструировать сетки двумя способами: решением задачи оптимизации функционала разностными методами, либо решением краевой задачи для уравнения Эйлера-Лагранжа.

В первом параграфе главы IV рассматривается вариационный подход построения оптимальных многомерных адаптивных сеток на основе функционала погрешности решения:

$$\Phi_{\Pi} = \int_{Q^n} \|r\|^2 dq \tag{13}$$

где $\|r\|$ – норма погрешности решения дифференциальной задачи

$$L(u,x) = 0 \tag{14}$$

относительно новой независимой переменной q, связанной с физической переменной x преобразованием x(q). В явном виде погрешность решения не всегда удается определить. Более просто можно получить погрешность R аппроксимации задачи (I4). В §I устанавливается связь между погрешностями r и R для произвольных дифференциальных операторов (I4), а именно, с точностью до главных членов

$$L_v(r) = R, \tag{15}$$

где $L_v(r)$ – уравнение вариации системы (I4). Учитывая (I5), конструирование оптимальной сетки на основе функционала погрешности далее формулируется как задача минимизации функционала (I3) с ограничениями (I5). Такая задача решается известным методом с помощью множителей Лагранжа. В конце параграфа I приведены два примера использования оптимальных сеток для решений уравнений первого порядка на схемах первого и второго порядков. Показано, что шаг оптимальных сеток обратно пропорционален некоторым степеням производных решения. Кроме того, оптимальные сетки для этих уравнений увеличивают порядок точности на единицу.

В §2 рассматривается метод построения сеток на основе функционала сгущения, лагранжевости и регулярности. В этом методе функционал формулируется в виде:

$$\Phi = \int_{X \times I} (\varepsilon_1 h^1 + \varepsilon_2 h^2 + \varepsilon_3 G\Delta^{\alpha}) dx dt, \qquad (16)$$

где h^1 – *локальная мера регулярности, определяемая* девиатором деформации преобразования $q(x)$, h^2 – локальная мера отклонения сетки от лагранжевой, G – функция, зависящая от производных решения, Δ – якобиан преобразования $x(q)$, ε_i – положительные параметры.

При минимизации функционала (16) разностная сетка стремится стать регулярной, близкой к лагранжевой и сгущающейся в зонах больших градиентов. Далее выписаны уравнения для преобразования $x(q)$, минимизирующего функционал (16).

Показано, что в одномерном случае функционал (16) приводит к методу весовых функций, в котором шаг сетки обратно пропорционален некоторой положительной функции, зависящей от производных решения. Далее в конце параграфа приведено обобщение метода весовых функций на случай построения многомерных адаптивных сеток. Рассмотрены методы построения сеток с помощью композиции преобразований, каждое из которых сгущается в одном направлении и с помощью наложения подобных преобразований.

В третьем параграфе изложен метод проекций конструирования адаптивных сеток на основе функционала регулярности. В этом методе адаптивная сетка получается в виде проекции регулярной сетки, построенной на поверхности S^{rn}, определяемой либо значениями компонент решения, либо их производными, либо другими величинами, эффективно выделяющими особенности задачи. Этот метод обладает рядом достоинств. Он позволяет конструировать сетки единообразно как в области, так и на границе, независимо от их размерностей и требований регулярности и адаптации. Этот метод годится для построения структурных и неструктурных адаптивных сеток.

Регулярная сетка на поверхности конструируется с помощью функционалов регулярности, зависящих от инвариантов I_i, $i=1,2,\ldots,n$ метрического тензора параметризации поверхности S^{rn} в виде

$$\Phi = \int_{S^{rn}} F(I_1, I_2, \ldots, I_n)dS^{rn} \qquad (17)$$

Функция $F(I_i)$ выбирается таким образом, чтобы при минимизации (I7) сетка стремилась стать равномерной на поверхности S^{rn} и, кроме этого, чтобы функционал (I7) был выпуклым. При таких условиях уравнение Эйлера-Лагранжа имеет компактный вид, а краевая задача для его решения, как и задача минимизации функционала (I7), будет корректной. В параграфе 3 рассмотрено два вида функционалов регулярности: функционал гладкости

$$\Phi_{гл} = \int_{S^{rn}} I_{n-1}/I_n dS^{rn} \qquad (18)$$

и функционал близости сетки к гиперкубической

$$\Phi_{гк} = \int_{S^{rn}} (I_{n-1}/I_n)^{n/2} dS^{rn}, \qquad (19)$$

который является безразмерным при произвольном n.

В частном случае, когда S^{rn} - n-мерная область, сетка, построенная по функционалу (I8), будет известной сеткой Уинслоу. Таким образом, предложенный метод конструирования сеток на основе функционала (I8) можно рассматривать как обобщение метода Уинслоу для построения адаптивных сеток на поверхностях или областях произвольной размерности. В §3 указывается также, что, согласно результатам теории дифференциальной геометрии, сетки, построенные на основе функционала гладкости, всегда невырожденные, если вычислительная область Q^n выпукла и диффеоморфна поверхности S^{rn}. Далее приводятся уравнения Эйлера-Лагранжа для функционалов (I8) и (I9) для произвольных размерностей и для частных случаев $n = 1,2,3$. Показано, что в одномерном случае адаптивная сетка, построенная на основе функционала гладкости (I8), будет проекцией равномерной сетки, определенной на кривой решения.

В §4 приведены примеры построения сеток на основе функционалов адаптации и регулярности и результаты расчетов некоторых задач на таких сетках. Рассмотрены численные расчеты: I)модельной задачи для одномерного уравнения Хопфа, 2)симметричных стационарных течений вязкого теплопроводного газа, 3)модельной задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Также приведены примеры сеток как регулярных, так и адаптивных на поверхностях и в областях. Численные расчеты показывают, что предложенные сетки эффективно сгущаются в зонах высоких градиентов решения и позволяют проводить расчеты задач с особенностями типа погранслоя и ударной волны на небольшом числе узлов.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

Основные результаты и выводы

I. Получены оценки производных решений одномерных стационарных и нестационарных бисингулярных задач, позволяющие эффективно локализовывать слои и определять их качественную структуру.

2. Построены локальные базисные преобразования координат для конструирования адаптивных сеток в методах растяжения при численных расчетах задач с малым параметром.

3. Установлена зависимость между погрешностью аппроксимации двухточечной краевой задачи с малым параметром и погрешностью ее численного решения. Доказана равномерная сходимость решения некоторых бисингулярных задач на предложенных адаптивных сетках.

4. Предложен функционал погрешности построения многомерных адаптивных сеток и исследованы некоторые его свойства.

5. Предложен и апробирован функционал адаптации для конструирования двумерных сеток.

6. Получено обобщение метода весовых функций на многомерный случай.

7. Предложен метод проекции построения адаптивных сеток

на основе функционалов регулярности: гладкости и близости сетки к гиперкубической. Проведены теоретические исследования и численные эксперименты, подтверждающие его эффективность.

Работа выполнена в Институте Вычислительных Технологий Сибирского Отделения РАН. Автор глубоко благодарен Н.Н.Яненко, который проявлял внимание и заинтересованность в решении проблемы построения адаптивных сеток и помогал в исследованиях вариационных методов их конструирования. Автор также выражает глубокую признательность член-корр. РАН Ю.И.Шокину за поддержку исследований в разработке методов построения адаптивных сеток. На разных этапах работа по созданию и апробированию методов велась совместно с С.В.Анищиком, Н.Т.Данаевым, Т.Г.Дармаевым, А.Жарилкасиновым, К.Т.Искаковым, В.М.Ковеня и В.Е.Петренко. Всем им, а также коллективу Института Вычислительных Технологий, диссертант выражает благодарность за помощь и внимание.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. Адаптивно-инвариантный метод численного решения задач с пограничными и внутренними слоями. -Новосибирск, ВЦ СО АН СССР. -1989. -258с.
2. Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. Метод подвижных координат в газовой динамике // Числен. методы механ. сплошной среды. -Новосибирск, -1976. -Т.7. -N 2.-С. 75-82.
3. Yanenko N.N., Kroshko E.A., Liceikin V.D. et al. Methods for the construction of moving grids for problems of Fluid Dynamics with big deformations.//Lecture Notes in Physics.-1976.-Vol.59.-P.454-459.
4. Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О выборе оптимальных разностных сеток // Числен. методы механ. сплошной среды. -Новосибирск, 1977. -Т.8. -N 7. -С.100-104.
5. Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О методе подвижных координат в газовой динамике//Проблемы математической физики и вычислительной математики. -М.Наука.,1977, -С.107-115.
6. Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток // Числен. методы механ. сплошной среды, Новосибирск.-1977.-Т.8.-N 4.-С. 157-163.
7. Лисейкин В.Д. Об оптимальной сетке для численного решения обыкновенного дифференциального уравнения // Числен. методы механ. сплошной среды.-Новосибирск, 1978.-Т.9. -N 6.-С. 115-118.
8. Yanenko N.N., Kovenja V.M., Liceikin V.D. On some methods for the numerical simulation of flows with complex structure//Lecture Notes in Physics.-1979.-Vol.90. -P.565-578.

9. Yanenko N.N., Liceikin V.D., Kovenja V.M. The method of the solution of gaz dynamical problems in moving meches// Lect. Notes in Physics.-1979.-Vol.91.-P.48-61.
10. Yanenko N.N., Kovenja V.M., Liceikin V.D. et al. On some methods for the numerical simulation of flows with complex structure//Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.-1979. -Vol.17/18.-P.659-671.
11. Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О численном решении задачи обтекания тела вращения вязким теплопроводным газом на криволинейной подвижной сетке // Числ. методы механ. сплошной среды.-Новосибирск: ВЦ и Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1980.-Т.11.-N 1.-С. 31-61.
12. Лисейкин В.Д. Об оптимальных сетках для схем второго порядка, аппроксимирующих обыкновенное дифференциальное уравнение // Числен. методы механ. сплошной среды.-Новосибирск, 1981.-Т.12.-N 1.С. 78-81.
13. Лисейкин В.Д. О численном решении двумерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных // Числен. методы механ. сплошной среды.-Новосибирск: ВЦ и Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1983.-Т.14-N 4.-С. 110-115.
14. Жарилкасинов А., Лисейкин В.Д., Скобелев Б.Ю., Яненко Н.Н. Применение неравномерной сетки для численного решения задачи Орра-Зоммерфельда // Числен. методы механ. сплошной среды.-Новосибирск: ВЦ и Ин-т теорет. и прикл. механики, 1983.-Т.14.-N 5.-С. 45-54.
15. Лисейкин В.Д. Применение неравномерных сеток для построения равномерно сходящихся алгоритмов численного решения сингулярно-возмущенных задач // Числен. методы динамики вязкой жидкости.-Новосибирск, 1983.-С. 227-230.
16. Лисейкин В.Д. О численном решении сингулярно-возмущенного уравнения с точкой поворота // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1984.-Т.24.-N 12.-С. 1812-1818.
17. Лисейкин В.Д. О численном решении уравнений со степенным погранслоем//Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1984.-Т19.-N2.-С.90-97.
18. Liceikin V.D., Yanenko N.N. On the numerical solution of equations with interior and exterior layers on a nonuniform mesh//BAIL-III. Proc. 3-th Int. Conf. Boundary and Interior Layers, Dublin, -1984. -P. 68-80.
19. Искаков К.Т., Лисейкин В.Д., Смагулов Ш. Численное решение сингулярно-возмущенных уравнений с разрывными коэффициентами // Численные методы механики сплошной среды, -Новосибирск.-1985.-Т.16.-N 6.-С. 84-92.
20. Лисейкин В.Д. О численном решении уравнений со степенным погранслоем // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.-1986.-Т.26.-N 12.-С. 1813-1820.
21. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. О численном решении нелинейных сингулярно-возмущенных задач // Докл. АН СССР, -1987.-Т.297.-N 4.-С. 791-794.
22. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. О численном решении нелинейных сингулярно-возмущенных задач. -Новосибирск, 1987. -64 С. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр; N 687).
23. Дармаев Т.Г., Лисейкин В.Д. Метод построения многомерных адаптивных разностных сеток // Моделирование в механике, 1987.-Т.1(18).-N 1.-С. 49-58.

24. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. Метод адаптивно инвариантной сетки для численного решения квазилинейного сингулярно-возмущенного уравнения с точкой возврата.-Новосибирск, 1987.-54 С. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр; N 735).
25. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. О численном решении квазилинейного сингулярно-возмущенного уравнения с точкой возврата // Докл. АН СССР, 1988.-Т.302.-N 4.-С. 802-807.
26. Дармаев Т.Г., Лисейкин В.Д. Применение специальных преобразований для численного решения одномерной задачи теории упругости и оболочек // Числен. методы решения задач теории упругости и пластичности. - Новосибирск, 1988. -С.76-83.
27. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е.О численном решении сингулярно-возмущенных задач с внутренними слоями // Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа.-Новосибирск, ВЦ.-1988.-С. 65-82.
28. Лисейкин В.Д. О численном решении нелинейных сингулярно-возмущенных уравнений // Моделирование в механике. -Новосибирск, 1988.-Т.2.-N 3.-С. 77-88.
29. Анищик С.В., Лисейкин В.Д. О численном решении сингулярно-возмущенной задачи, моделирующей диффузионно-дрейфовое движение // Моделирование в механике /АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ и Ин-т теорет. и прикл. механики.-1988. -N5.-С. 3-16.
30. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. О мажорирующих функциях и разностных сетках для численного решения задач с пограничными и внутренними слоями // Проекционно-сеточные методы в задачах численного анализа.-Новосибирск. ВЦ-1989 -С. 133-151.
31. Liceikin V.D., Petrenko V.E. Adaptive invariant method for solving aerodynamic problems with small parameter affecting the higher derivatives. // Proc. Soviet. Union, Japan Symposium CFD.-Moskow.-1989.-P.184-190.
32. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. О структуре и локализации слоев для сингулярно-возмущенных задач // Физическая газодинамика реагирующих сред. -Новосибирск. -Наука. -1990. -С. 151-157.
33. Лисейкин В.Д. Применение специальных преобразований для численного решения задач с пограничными слоями // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. -1990.-Т.30.N 1.-С.58-71.
34. Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения адаптивных сеток на n-мерных поверхностях // Докл. АН СССР. -1991. -Т319.-N 3.-С. 546-549.
35. Лисейкин В.Д. О конструировании регулярных сеток на n-мерных поверхностях // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.-1991.-Т.31.N 11.-С. 1670-1683.
36. Лисейкин В.Д. Технология конструирования трехмерных сеток для задач аэрогазодинамики. Обзор // Вопросы атомной науки и техники. Сер. матем. моделир. физич. процессов. -1991.-Вып.3.-С. 31-45.
37. Лисейкин В.Д. О конструировании адаптивных сеток // Моделирование в механике.-Новосибирск,-1991.-Т.5.N 5.-С.77-85.
38. Лисейкин В.Д. Об оценках производных решений дифференциальных уравнений с пограничными и внутренними слоями // Сибирский математ. журн.-1992.Т.33.N 6.-С.106-117.

Лисейкин