

A ⁸⁹
18510

КОНТРОЛЬНЫЙ ЭКЗЕМПЛЯР

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

ВОРОЖЦОВ Евгений Васильевич

УДК 519.63:533.6:528.854

МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ И КЛАССИФИКАЦИИ
ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ
ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ

01.01.07 - вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 1989

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной механики Сибирского отделения АН СССР.

Официальные оппоненты:

д.ф.-м.н., член-корр. АН СССР В.В.Русанов

д.ф.-м.н., член-корр. АН СССР А.Ф.Сидоров

д.ф.-м.н., профессор А.Н.Коновалов

Ведущая организация: Московский государственный университет,
факультет вычислительной математики и ки-
бернетики

Защита состоится " _____ " _____ 19 ____ года в _____ часов на заседании специализированного совета Д 002.10.01 по присуждению ученой степени доктора наук в Вычислительном центре СО АН СССР (630090, Новосибирск-90, пр. Акад. Лаврентьева, 6).

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале Отделения ЦНТБ (Новосибирск-90, пр. Акад. Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан " _____ " _____ 19 ____ г.

Ученый секретарь специализированного совета

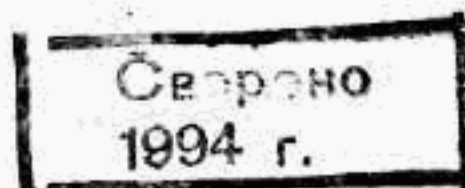
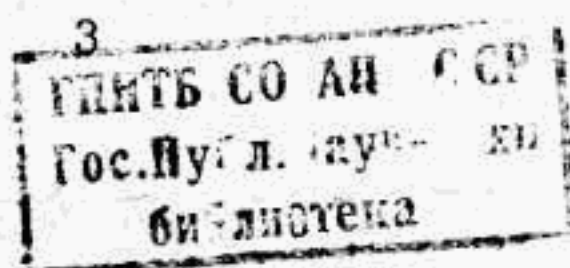
кандидат физико-математических наук



Ю.И.Кузнецов

Актуальность проблемы. В настоящее время при численном исследовании разнообразных задач аэрогидромеханики и математической физики, содержащих особенности типа сильных разрывов, слабых разрывов, поверхностей отрыва потока и пр., широко применяются конечно-разностные схемы сквозного счета. В численных решениях, получаемых с помощью таких схем, разрывы "размазываются", то есть аппроксимируются некоторыми переходными зонами, размер которых вдоль нормали к поверхности разрыва обычно составляет несколько интервалов пространственной расчетной сетки. Это "размазывание" разрывов, а также наличие во многих случаях паразитических осцилляций в окрестности фронтов разрывов приводят к необходимости решения следующих актуальных проблем: проблемы интерпретации результатов "сквозных" численных расчетов и проблемы повышения точности разностных решений в окрестности разрывов. Применительно к задачам динамики невязкого сжимаемого нетеплопроводного газа проблема интерпретации данных расчетов включает в себя локализацию, то есть определение положения, и классификацию особенностей, которые могут присутствовать в течении газа.

Наличие нескольких типов особенностей в течениях невязкого газа, а также наличие разнообразных алгоритмов локализации различных особенностей в течениях газов на основе сквозных численных решений требует проведения широких теоретических исследований, имеющих целью анализ точности указанных алгоритмов локализации и разработку новых, более точных и более эффективных алгоритмов локализации особенностей. Для полного решения проблемы интерпретации данных газогидродинамических расчетов необходимо выявленные поверхности разрывов классифицировать по типам (ударные волны, контактные разрывы и т.п.). Использование методов локализации и классификации особенностей в течениях газов на основе "сквозных" численных решений позволяет получать полную информацию о структуре изучаемого течения, включающую в себя как геометрические, так и разнообразные физические характеристики опознанных объектов. Поэтому такая информация может быть эффективно использована не только для целей автоматического анализа структур течений, но и для управления процессом расчета (например, для перестройки сетки с учетом положений особенностей и их типов) и для использования данных о структуре течения в эксперт-



ных системах автоматизации проектирования новых аэродинамических тел, удовлетворяющих заданным требованиям оптимальности.

Цель работы состоит в разработке и обосновании алгоритмов локализации и классификации особенностей на основе "сквозных" численных решений одно- и двумерных задач динамики невязкого сжимаемого нетеплопроводного газа.

Научная новизна и практическая ценность. Впервые разработаны методики исследования точности локализации ударных волн и контактных разрывов на основе сквозных численных решений задач газовой динамики. С использованием этих методик построен ряд новых, более точных алгоритмов локализации особенностей в численных решениях. Впервые осуществлены разработка и программная реализация методов классификации особенностей в произвольных двумерных течениях невязкого газа с использованием концепций и методов цифровой обработки изображений и цифрового распознавания образов.

Практическая ценность разработанных методов локализации и классификации особенностей состоит в том, что указанные методы позволяют:

- 1) выполнять автоматический анализ структуры сложных газогидродинамических течений при их численном исследовании с помощью ЭВМ;
- 2) осуществлять управление расчетом течения с целью повышения точности численных решений;
- 3) поставлять исходную информацию при принятии решений в экспертных системах автоматизации проектирования оптимальных аэродинамических форм.

Часть результатов диссертации использовалась при создании комплекса прикладных программ в рамках технических заданий по темам, связанным с задачами высокоскоростного взаимодействия тел. Данный комплекс программ, внедренный в ряде организаций РСФСР, входит в цикл работ, за которые присуждена премия Ленинского комсомола 1977 года.

Автор защищает:

- разработку и обоснование методов исследования точности алгоритмов локализации особенностей в течениях невязкого газа на основе "сквозных" численных решений;

- разработку и обоснование методов повышения точности разностных решений в окрестности сильных разрывов;

- разработку и обоснование методов классификации особенностей в двумерных течениях невязкого газа при их численном моделировании с помощью схем сквозного счета;

- результаты практического применения разработанных алгоритмов локализации и классификации особенностей при анализе структур ряда слепых двумерных течений газа.

Основные результаты работы сформулированы в заключительной части автореферата ("Основные результаты и выводы").

Апробация. Представленные в диссертации результаты по мере их получения докладывались на семинарах: кафедры вычислительных методов механики сплошной среды Новосибирского государственного университета, отделов Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР, лаборатории методов сплайн-функций Института математики СО АН СССР, лаборатории Уральского НИИ математики и механики Уральского отделения АН СССР, Свердловск, лаборатории теории фильтрации Института гидродинамики СО АН СССР им. М.А. Лаврентьева, отдела искусственного интеллекта Института математики СО АН СССР, в МВТУ им. Н.Э.Баумана. Кроме того, результаты работы докладывались на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, 1976, Киев; на VII Всесоюзном семинаре по аналитическим методам в газовой динамике, 1976, Уфа; VI Международной конференции по численным методам в гидродинамике, 1978, Тбилиси; на Школе-семинаре социалистических стран "Вычислительная гидродинамика", 1985, Самарканд; на I Региональном семинаре "Математические проблемы цифровой обработки изображений", 1985, Новосибирск; на Региональной конференции "Прикладная механика сплошных сред", 1987, Томск; на Всесоюзной школе-семинаре "Математическое моделирование сложных гидродинамических систем", 1987, Алушта; на Региональной конференции "Обработка изображений и дистанционные исследования", 1987, Новосибирск; на Советско-японском симпозиуме по вычислительной аэрогидродинамике, 1988, Хабаровск; на Школе-семинаре социалистических стран "Вычислительная механика и автоматизация проектирования", 1988, Ташкент; на Всесоюзном семинаре "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики", 1988, Кемерово.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 39 работ, в том числе монография [1] (в соавторстве с Н.Н.Яненко). Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1+25].

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка цитированной литературы и приложения; содержит 297 страниц машинописного текста, в том числе 1 таблицу и 62 рисунка. Список цитируемой литературы содержит 295 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, проведен анализ и обзор исследований по проблеме локализации особенностей при численном решении задач газовой динамики. Дана общая характеристика работы и приведено краткое содержание глав.

В начале введения перечисляются некоторые классы задач, решения которых могут содержать те или иные особенности. Например, в задачах динамики невязкого газа встречаются особенности типа ударных волн и контактных разрывов, в теории пограничных слоев - поверхности отрыва потока, в теории турбулентности - когерентные структуры, в задачах метеорологии - атмосферные фронты, в магнитной гидродинамике - магнитогиродинамические ударные волны, в задачах фильтрации - фронты насыщенности, в задачах горения - фронты пламен. Универсальным средством решения таких задач является конечно-разностные методы сквозного счета. Перечисляются области применения систем локализации и классификации особенностей исходя из конечно-разностных решений: во-первых, как средство познания сложных явлений или процессов; эта область применения указывалась в работах А.Н.Тихонова, О.М.Белоцерковского, П.Катлера, Дж.Стегера, Ф.Бейли, Р.Бели. Вторая область применения указанных систем связана с непосредственным использованием информации, получаемой на выходе таких систем, для управления процессом численного решения основной задачи с целью повышения точности расчета. Конкретные способы управления расчетом обсуждались в работах О.М.Белоцерковского, П.Катлера, У.Метт, А.Эндреса, И.Л.Добросердова. Третья область применения систем извлечения информации о положении и типах особенностей в сочетании с вычислительными "сквозными" методами связана с автоматизацией проектирования новых аэродинамических форм или новых техниче-

ких устройств, для чего рядом авторов (С.С.Тонг; А.Эндрюс; Дж.Ф.Данненхоффер, Дж.Р.Барон, Г.С.Поспелов) предложено привлекать концепции искусственного интеллекта и экспертных систем.

Далее во введении сделан обзор методов расчета течений газа с разрывами, в которых поверхности разрыва выделяются явным образом и их эволюция отслеживается в процессе расчета задачи. К таким методам принадлежат метод характеристик и различные варианты метода "подгонки скачка". Многомерные задачи газовой динамики, при расчетах которых применялся метод характеристик, ограничиваются, главным образом, сверхзвуковыми стационарными и нестационарными течениями. Отмечены (с ссылкой на обзор П.Роуча) недостатки метода характеристик, в частности, сложность уравнений метода и программирования, в особенности при распространении метода на трехмерные течения. В методе подгонки скачка ударная волна рассматривается как разрыв, и для вычисления величин по обе стороны разрыва привлекаются условия Гюгонио. В подобластях непрерывного течения между ударными фронтами расчет производится по какой-либо из употребительных разностных схем сквозного счета. Наиболее трудным для программирования является метод подгонки скачка, в котором ударные волны, рассматриваемые как разрывы, свободно плавают между узлами сетки. Описания различных реализаций метода подгонки скачка можно найти в работах Дж.Моретти, М.Д.Сейласа, М.Пандольфи, И.Ямамото, К.Карасимы, П.Катлера, Дж.Дейуита, Дж.Глимма, О.Мак-Брайана и ряда других авторов. Отмечены трудности учета в методе подгонки скачка исчезновения некоторых поверхностей разрывов или появления новых таких поверхностей.

Методы сквозного счета выгодно отличаются от перечисленных выше методов явного выделения разрывов простотой программирования и отсутствием необходимости априорного учета ударно-волновой структуры моделируемого течения. Сущность излагаемого в диссертации общего подхода к разработке и исследованию методов локализации разрывов на основе сквозного счета состоит в максимальном использовании информации как об известных свойствах решений исходной системы нелинейных уравнений течения, так и о структуре конечно-разностного решения в зоне размазывания разрыва.

В первой главе исследуется точность локализации ударных волн с помощью некоторого класса алгоритмов локализации - диффе-

ренциальных анализаторов. В качестве отправного понятия при исследовании точности локализации взято понятие центра размазанной ударной волны, которое иллюстрируется в § 1 на примере рассмотрения свойств решения уравнения Бюргерса с разрывными начальными данными вида ступеньки и решения того же уравнения, известного как N -волна. Показано, что в случае N -волны не существует центр размазанной ударной волны. В § 2 рассматриваются вопросы, связанные с исследованием существования предельных профилей дискретных разрывов при $t \rightarrow \infty$, где t - время. Эти профили ищутся как решения вида $\vec{w}_h(\eta)$ систем разностных уравнений, где \vec{w}_h - искомый вектор решения, $\eta = (x - Dt)/h$, то есть $\vec{w}_h(\eta)$ - решение типа бегущей волны; h - шаг равномерной расчетной сетки вдоль эйлеровой пространственной координаты x ; D - скорость стационарной ударной волны. После того, как факт существования решения вида $\vec{w}_h(\eta)$ системы разностных уравнений, аппроксимирующей систему уравнений течения сплошной среды, установлен, легко доказать существование центра волны в предельном профиле дискретного разрыва, что и сделано в § 2. Действительно, при $x = Dt$ получаем, что $\eta = 0$ независимо от τ и h , где τ - временной шаг разностной схемы. С другой стороны, уравнение $x = Dt$ есть уравнение точной траектории стационарной ударной волны. Поэтому определение координат центра дискретной ударной волны можно положить в основу алгоритмов локализации фронта ударной волны, когда течение газа с ударной волной рассчитывается с помощью конечно-разностной схемы сквозного счета. Для того, чтобы найти указанный центр практически, нужно провести два расчета одной и той же задачи с различными шагами h , τ , например, с шагами (h, τ) и $(h/2, \tau/2)$; после этого нужно найти в зоне размазывания ударной волны точку пересечения графиков решений, полученных при различных (h, τ) .

Стационарная система уравнений газовой динамики, получаемая из системы уравнений Эйлера путем замены давления p на величину $p + q$, где q - искусственная вязкость, является одной из наиболее простых математических моделей, описывающих эффекты размазывания ударных волн в результате введения искусственной вязкости. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(u-D) = C_1 = m, \quad p+q + m(u-D) = C_2, \\ m \left[p/(\rho(\gamma-1)) + (u-D)^2/2 \right] + (p+q)(u-D) = C_3, \end{aligned} \quad (I)$$

где u, p, ρ - соответственно скорость, давление и плотность газа, которые предполагаются зависящими только от переменной $x' = x - Dt$, γ - постоянная, входящая в уравнение состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2)$$

$\gamma = \text{const} > 1$, ε - удельная внутренняя энергия, C_1, C_2, C_3 - постоянные интегрирования. Искусственная вязкость q в § 3 берется в виде

$$q = \begin{cases} F(hdu/dx', hdp/dx', hdp/dx', p, \rho), & du/dx' < 0 \\ 0 & , du/dx' \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Далее величины u, p, ρ, q с помощью (I) выражаются как функции удельного объема $V(x') = 1/\rho(x')$. Величины, определяющие состояние за фронтом ударной волны, пометим индексом "1", а перед фронтом - индексом "2". Подставляя в (3) выражения $u(V), p(V), \rho(V), q(V)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $V(x')$ вида

$$\tilde{F}(V(x'), h dV/dx') = (1/2)(\gamma+1)(m^2/V)(V_2-V)(V-V_1), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}(V(x'), h dV/dx') = F(h \cdot m dV/dx', h(\gamma-1)(m^2/2) \cdot \\ \cdot (1 - (\gamma+1)V_1 V_2 / ((\gamma-1)V^2)) dV/dx', -V^{-2} h dV/dx', p(V), V^{-1}). \end{aligned}$$

Уравнение (4) рассматривается в дальнейшем при краевых условиях

$$\lim_{x' \rightarrow -\infty} V(x') = V_1, \quad \lim_{x' \rightarrow +\infty} V(x') = V_2 \quad (5)$$

Обозначим через G_3 конечный отрезок на оси x' , который находится в зоне размазывания ударной волны и в котором происходит наиболее существенное изменение решения $V(x')$ при возрастании

x' . Согласно общим свойствам решений автономных уравнений, переменная x' может входить в решение $V(x')$ только в виде комбинации $x' - x'_0$, где x'_0 - произвольная постоянная, то есть $V = V(x' - x'_0)$.

Определение I.I. Центром размазанной ударной волны в решении $V(x' - x'_0)$ задачи (4), (5) назовем точку $x'_* \in G_3$, в которой значение решения $V(x'_* - x'_0)$ не зависит от величины шага сетки h при фиксированном значении постоянной x'_0 .

Будем говорить далее, что центр размазанной ударной волны единственный, если, во-первых, при фиксированном значении постоянной x'_0 существует единственная точка x'_* , в которой $V(x'_* - x'_0)$ не зависит от h и, во-вторых, $V(x'_* - x'_0)$ не зависит от выбора постоянной сдвига x'_0 .

Теорема I.I. Если выполнены условия:

- 1) уравнение (4) имеет единственный положительный корень $h dV/dx' = f(V)$, причем,
- 2) $f(V) > 0$ при $V_1 < V < V_2$, $f(V_1) = f(V_2) = 0$;
- 3) $f(V) \in C^1[V_1, V_2]$,

то существует единственный центр размазанной ударной волны в решении задачи (4)-(5).

В § 3 показано на ряде примеров, что требование существования центра размазанной ударной волны накладывает некоторые ограничения на безразмерные параметры, которые могут входить в формулу для псевдовязкости q . В частности, рассмотрена "комбинированная" вязкость

$$q = -a h c_p (1 + b c_p (du/dx') / (dp/dx')) \min(du/dx', 0),$$

где $a = \text{const} > 0$, c - скорость звука, $b_1 = \text{const} \geq 0$, $b_2 = \text{const} \geq 0$, $b_1 + b_2 > 0$, и вязкость вида, предложенного Н.Н.Яненко [I]

$$q = -a h c_p (1 + b c_p (du/dx') / (dp/dx')) \min(du/dx', 0),$$

где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const} \geq 0$, c - скорость звука. Исследована точность ряда дифференциальных анализаторов ударных волн, включающих операторы численного дифференцирования по пространственной координате.

Структура аппроксимационной вязкости разностных схем, используемых в настоящее время для расчетов течений газа с разры-

вами, весьма сложна. Это существенно затрудняет теоретическое исследование вопросов существования центра волны в дискретных профилях разрывов. Поэтому в § 4 рассматривается вопрос о применимости решений типа бегущей волны уравнений первого дифференциального приближения (п.д.п.) разностной схемы для приближенного описания предельных профилей дискретных разрывов. Это исследование выполнено в п.4.1 на основе прямого сопоставления численных решений, получаемых при интегрировании дифференциальных уравнений п.д.п., с сеточными, найденными при решении уравнений конечно-разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений неразрывности, импульса и энергии в переменных Эйлера. Сделан вывод о применимости аппарата п.д.п., во всяком случае при расчете течения с помощью схем первого порядка точности; при этом интенсивности присутствующих в течении ударных волн должны быть конечными. В п.4.2 § 4 рассмотрено многопараметрическое семейство дивергентных разностных схем, аппроксимирующее систему уравнений Эйлера для одномерного нестационарного течения невязкого газа и включающее в себя ряд известных схем первого и второго порядков аппроксимации. В этом семействе выделен класс схем, для которых существует центр размазанной ударной волны. В этот класс, в частности, входит схема П.Д.Лакса 1954 г. Рассмотрен дифференциальный анализатор ударных волн, в котором положение фронта волны определяется как точка, в которой достигают максимума компоненты вектора аппроксимационной вязкости, получаемые из выражения для п.д.п. рассматриваемой разностной схемы.

В § 5 рассматриваются вопросы практической реализации алгоритмов дифференциальных анализаторов ударных волн в одномерных течениях. Обсуждаются источники ошибок при определении фронта ударной волны на основе понятия центра конечно-разностной ударной волны, которое вводится в § 5. Под конечно-разностной ударной волной понимается решение конечно-разностных уравнений, аппроксимирующее ударную волну и вычисленное в дискретных точках сетки в плоскости (x, t) .

Определение 1.2. Центром конечно-разностной ударной волны будем называть точку в зоне конечно-разностной ударной волны, принадлежащую решениям конечно-разностных уравнений при одном и том же t , полученным при двух различных значениях постоянных шагов h, τ : $h = h_1$, $\tau = \tau_1$, $h = h_2$, $\tau = \tau_2$, причем,

$|h_1 - h_2| + |\tau_1 - \tau_2| \neq 0$, и доопределенным в точках (x, t) , не являющихся узловыми, с помощью линейной интерполяции.

Определение 1.3. Под дифференциальным анализатором ударной волны будем понимать алгоритм, позволяющий найти координаты центра конечно-разностной ударной волны в расчетной ячейке по результатам сквозного счета.

Приводятся примеры расчетов, иллюстрирующие точность локализации разрывов с помощью описанных алгоритмов. В частности, показано, что при использовании ряда известных разностных схем первого и второго порядков точности, в частности, схемы "распад разрыва" С.К. Годунова и схемы Мак-Кормака 1969 года, погрешность в определении положения фронта стационарной ударной волны на основе понятия центра конечно-разностной ударной волны составляет величину $< h$.

В §§ 6-9 содержится обобщение вышеизложенных алгоритмов дифференциальных анализаторов ударных волн на случай локализации ударных волн в двумерных течениях невязкого газа. В § 6 показано на примере методов частиц в ячейках Харлоу и "жидкость в ячейке" Джентри-Мартина-Дэли, что локальная ширина зоны размазывания криволинейного фронта ударной волны существенно зависит в каждой точке фронта от ориентации нормали к фронту разрыва по отношению к осям пространственных координат x, y . Эта анизотропия свойств численного решения приводит к различиям в точности локализации различных точек фронта скачка. В § 7 рассмотрены некоторые свойства решений типа бегущей волны уравнений п.д.п. в случае двух пространственных переменных x, y и временной переменной t . Получены необходимые условия существования центра размазанной ударной волны вдоль любого луча, ортогонального к ударному фронту. Эти условия имеют вид $h_2/h_1 = \text{const}$, $\tau/h_1 = \text{const}$, где h_1, h_2 - шаги равномерной расчетной сетки вдоль осей x, y , соответственно; τ - временной шаг разностной схемы. Показано, что в случае плоских стационарных течений правые части уравнений п.д.п. должны удовлетворять некоторому соотношению, вытекающему из требования существования интеграла Бернулли.

В § 8 описан дифференциальный анализатор для задач высокоскоростного взаимодействия тел. Расчет этого класса задач проводился по модифицированному методу Харлоу, в котором частицам бы-

ли приданы конечные размеры (частицы-круги). Исследованы свойства аппроксимационной вязкости в модифицированном методе Харлоу. Отмечается, что успешность применения описываемого дифференциального анализатора для задач высокоскоростного взаимодействия тел существенно зависит от наличия априорной информации об ориентации поверхностей разрывов относительно осей пространственных координат. Локализация точек фронтов ударных волн в этом анализаторе осуществлялась посредством поиска точек, в которых достигается $\max |\operatorname{div} \vec{u}|$ при $\operatorname{div} \vec{u} < 0$, вдоль лучей, приблизительно ортогональных к возникающим ударным волнам, где \vec{u} — вектор скорости жидкости.

В § 9 описаны наиболее сложные алгоритмы дифференциальных анализаторов в двумерных течениях, использующие евклидову норму схемной вязкости; выражения для операторов схемной вязкости берутся из п.д.п. рассматриваемых разностных схем. Приводятся примеры расчетов и делается вывод о практической применимости описанных в § 9 анализаторов.

Во второй главе рассматриваются вопросы построения и исследования точности дифференциальных анализаторов контактных разрывов. В § 10 показано, что исследование точности указанного класса алгоритмов можно проводить путем выяснения размера отклонения найденной с помощью дифференциального анализатора траектории контактного разрыва от некоторой линии, в каждой точке которой при каждом фиксированном t плотность газа, найденная с помощью схемы сквозного счета, не зависит от величин сеточных параметров h, τ , где τ — временной шаг разностной схемы; эта линия названа центральной линией контактной полосы. Таким образом, здесь имеется аналогия с использованным в главе I понятием центра размазанной ударной волны. Предложен общий метод исследования как п.д.п., так и непосредственно разностных схем на существование центральной линии контактной полосы. Этот метод включает в себя выполнение над п.д.п. или над разностной схемой операции квазилинеаризации. В основе этой легко выполняемой операции лежит факт непрерывности давления и нормальной составляющей скорости при переходе через контактный разрыв. Рассматривается модельная задача о распаде разрыва при решении системы уравнений Эйлера одномерного нестационарного течения, такая, что ее точное решение содержит только один тип разрывов —

контактный разрыв. Начальные данные в этой задаче ставятся следующим образом:

$$t = 0, u(x, t) = u_0, p(x, t) = p_0, \rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1, & x \leq x_0 \\ \rho_2, & x > x_0 \end{cases}, \quad (6)$$

где $u_0, p_0, \rho_1, \rho_2, x_0$ - постоянные, причем, $\rho_1 \neq \rho_2$. Предположим, что уравнение состояния газа, необходимое для замыкания системы уравнений Эйлера

$$\partial \vec{u} / \partial t + \partial \vec{\varphi}(\vec{u}) / \partial x = 0, \quad (7)$$

где $\vec{u} = \{\rho, \rho u, \rho E\}^T$, $\vec{\varphi}(\vec{u}) = \{\rho u, \rho + \rho u^2, \rho u + \rho u E\}^T$, $E = \varepsilon + u^2/2$, имеет вид

$$\varepsilon = f(p, \rho) \quad (8)$$

и пусть $f(p, \rho)$ является трижды непрерывно дифференцируемой по обоим аргументам в области определения этой функции. Рассмотрим класс разностных схем, аппроксимирующих систему (7) с порядком точности $O(h^2) + O(\tau^2)$, $1 \leq \tau \leq 2$ и таких, что Γ -форма их п.д.п. имеет вид

$$\Gamma \vec{w} \equiv \partial \vec{w} / \partial t + \partial \vec{\varphi}(\vec{w}) / \partial x - \sum_{\substack{i,j \\ i+j=\tau}} h^i \tau^j \vec{F}_{ij}(\vec{w}, \partial \vec{w} / \partial x), \quad (9)$$

$$\partial \vec{w} / \partial t, \dots, \partial^{\tau+1} \vec{w} / \partial x^{\tau+1}, \partial^{\tau+1} \vec{w} / \partial x^{\tau} \partial t, \dots, \partial^{\tau+1} \vec{w} / \partial t^{\tau+1} = 0,$$

где $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}^T$, $\vec{F}_{ij} = \{F_{ij1}, F_{ij2}, F_{ij3}\}^T$, h - шаг равномерной расчетной сетки на оси x , τ - временной шаг. Выразим производные $\partial^m \vec{w} / \partial x^k \partial t^{m-k}$, $m-k > 0$, входящие в \vec{F}_{ij} , через производные по x . В результате получим из (9) Π -форму п.д.п.

$$\Pi \vec{w} \equiv \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\varphi}(\vec{w})}{\partial x} - \sum_{\substack{i,j \\ i+j=\tau}} h^i \tau^j \vec{F}_{ij}(\vec{w}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{\tau+1} \vec{w}}{\partial x^{\tau+1}}) = 0. \quad (10)$$

Определение 2.1. Операцией квазилинеаризации L первого дифференциального приближения (9) или (10) назовем операцию

$$\Gamma L \vec{w} = 0, \quad \Pi L \vec{w} = 0,$$

где $L \vec{w} = \{w_1, L w_2, L w_3\}^T$, $L w_j = f_j(p, u_0, p_0, \varepsilon(p_0, \rho))$, $j = 2, 3$, u_0, p_0 - постоянные значения скорости и давления, входящие в (6).

Дальнейшее исследование получаемой после выполнения опера-

при квазилинеаризации системы уравнений оказывается возможным, если указанная система обладает свойством K -согласованности, определения которого даны в § 10. Введем в рассмотрение вектор-столбец

$$U = \left\{ 1, u_0, 0.5u_0^2 + f(\rho_0, \rho) + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, \rho) \right\}^T \quad (II)$$

Определение 2.2. Первое дифференциальное приближение (9) будем называть K -согласованным, если

$$\Gamma L \vec{w} = U \cdot \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j F_{ij1} (L \vec{w}, \frac{\partial L \vec{w}}{\partial x}, \frac{\partial L \vec{w}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{r+1} L \vec{w}}{\partial t^{r+1}}) \right] = 0,$$

то есть левые части уравнений системы $\Gamma L \vec{w} = 0$ отличаются друг от друга лишь на скалярный множитель.

Аналогично определяется K -согласованность Π -формы п.д.п. (10). Пусть в (10) $\vec{F}_{ij} = \{ F_{ij1}, F_{ij2}, F_{ij3} \}^T$. Из определения 2.2 вытекает, что исследование K -согласованного п.д.п. (10) при начальных данных (6) сводится к исследованию одного уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j F_{ij1} (L \vec{w}, \frac{\partial L \vec{w}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{r+1} L \vec{w}}{\partial x^{r+1}}). \quad (I2)$$

Уравнение (I2) рассматривается в дальнейшем в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T$, где $0 < T < \infty$, при начальном условии

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_1, & x \leq x_0, \\ \rho_2, & x > x_0 \end{cases} \quad (I3)$$

и краевых условиях

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x, t) = \rho_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x, t) = \rho_2, \quad 0 < t \leq T;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad r=2; \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad r=3;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad r=4; \quad 0 < t \leq T.$$

Далее в § 10 показано, что аналогичное предыдущему (см. определение 2.2) определение K -согласованности может быть дано и непосредственно для конечно-разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений Эйлера (7). Предположим, что явная (одно-, многошаговая) разностная схема, аппроксимирующая систему (7), (8), после исключения промежуточных шагов интегрирования пред-

ставима в виде

$$\rho^{n+1} = H_1(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau); \quad (I4)$$

$$(\rho u)^{n+1} = H_2(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau); \quad (I5)$$

$$(\rho E)^{n+1} = H_3(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau), \quad (I6)$$

где $u^n = u(x, t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$, T_1 - оператор сдвига вдоль оси x , то есть $T_1 u(x, t) = u(x+h, t)$, h - шаг равномерной сетки на оси x , τ - временной шаг.

Определение 2.3. Операцией квазилинеаризации \tilde{L} разностного выражения $H_j(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau)$, $1 \leq j \leq 3$, назовем операцию $\tilde{L}H_j \equiv \tilde{H}_j(u_0, p_0, \rho^n, f(p_0, \rho^n), T_1, h, \tau)$,

где функция $f(p, \rho)$ входит в уравнение состояния (8), а u_0 , p_0 - постоянные значения скорости и давления, входящие в (6).

Предположим, что уравнение состояния (8) таково, что из него можно найти давление p как функцию ρ, ε :

$$p = F(\rho, \varepsilon). \quad (I7)$$

Определение 2.4. Будем говорить, что разностное уравнение количества движения (I5) является K -согласованным с разностным уравнением неразрывности (I4), если

$$\tilde{L}H_2 = u_0 \tilde{L}H_1 \quad (I8)$$

Определение 2.5. Разностную схему (I4)-(I6), аппроксимирующую систему уравнений (7), (8), назовем K -согласованной, если уравнение количества движения (I5) является K -согласованным с разностным уравнением неразрывности (I4) и

$$F(\tilde{L}H_1, (\tilde{L}H_3 - 0.5(\tilde{L}H_2)^2/\tilde{L}H_1)/\tilde{L}H_1) \equiv p_0,$$

где функция $F(\rho, \varepsilon)$ входит в уравнение состояния (I7).

Далее в § 10 проводится анализ схем в случае K -согласованности п.д.п. При этом используется следующая теорема, доказанная в § 10:

Теорема 2.1. Если

1) первое дифференциальное приближение (I0) K -согласованно ($1 \leq \tau \leq 2$);

2) уравнение (I2) имеет вид

$$\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x = (-1)^{\tau+1} m(h, \tau, u_0, p_0) \partial^{\tau+1} \rho / \partial x^{\tau+1};$$

3) $m(h, \tau, u_0, p_0) > 0$,

то существует единственная центральная линия контактной полосы, совпадающая с траекторией контактного разрыва в решении задачи (7), (8), (6).

Из проведенного в § 10 анализа вытекают три алгоритма дифференциальных анализаторов контактных разрывов в одномерных течениях. Далее в § 10 показано, что обоснование алгоритмов локализации контактных разрывов в одномерных течениях можно выполнить полностью на дискретном уровне, таким образом, без использования первого дифференциального приближения разностной схемы. Такое обоснование оказалось возможным благодаря теоретическим результатам С.И.Сердюковой по асимптотике решения $\rho^n(x)$ (при $n \rightarrow \infty$, τ, h фиксированных) разностного уравнения, аппроксимирующего линейное уравнение $\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x = 0$ ($u_0 = \text{const}$) при разрывных начальных данных для $\rho(x, 0)$ вида (13).

В § 11 вводится понятие K -согласованности п.д.п. в двумерном случае. Подчеркивается, что это понятие, обобщающее аналогичное понятие из § 10, применимо при исследовании свойств "размазывания" только чисто контактных разрывов в двумерных течениях. В § 12 рассматриваются методы подавления K -несогласованности, вызванной отклонением используемого уравнения состояния от уравнения состояния идеального газа. Выше в § 10 было получено условие

$$\partial^2 / \partial \rho^2 [\rho \cdot f(\rho_0, \rho)] \equiv 0, \quad (19)$$

которому должно удовлетворять уравнение состояния (8) для того, чтобы обеспечивалась K -согласованность п.д.п. На примерах расчетов одномерных задач с контактными разрывами показано, что относительные ошибки в давлении и скорости в контактной полосе при отсутствии K -согласованности могут достигать нескольких десятков процентов. Описаны алгоритмы подавления K -несогласованности в схемах первого и второго порядков точности, позволяющие уменьшить ошибки в давлении и скорости в 5-15 раз. Идея этих алгоритмов состоит в модификации разностной схемы путем добавления в разностное уравнение энергии (в отдельных случаях также и в разностное уравнение импульса) соответствующего корректирующего члена, обеспечивающего восстановление K -согласованности п.д.п. В п.12.3 показано, что можно строить точные алгоритмы восстановления K -согласованности разностной схемы. Эти алгоритмы используют некоторое понятие K -согласованности разностной схемы, эквивалентное введенному выше в § 10. На ряде

примеров показано, как модифицировать разностную схему из требования наличия свойства K -согласованности. В частности, доказана

Теорема 2.2. Если уравнение состояния (8) таково, что при каждом фиксированном $p_0 \geq 0$ имеет место тождество (19), то схема Лакса является K -согласованной.

Полученные в п.12.3 из требования K -согласованности разностные схемы оказываются неоднородными, в отличие от схем, полученных в пп. 12.1-12.2 из требования K -согласованности п.д.п. Несомненным достоинством схем п.12.3 является то, что их использование в расчетах позволяет свести ошибки в давлении и скорости в контактной полосе до уровня машинных ошибок округления, то есть влияние K -несогласованности схемы при "неидеальном" уравнении состояния устраняется практически полностью. Многочисленные примеры расчетов, приведенные в § 12, показывают, что предложенные алгоритмы подавления или устранения K -несогласованности существенно увеличивают точность локализации контактного разрыва при использовании дифференциального анализатора, описанного в § 10.

В третьей главе исследуется еще один класс методов локализации разрывов - оптимизационные методы. Идея этих методов принадлежит Миранкеру и Пиронно (1975г.) и состоит в следующем. Вдоль траектории ударной волны $x = \xi(t)$ в одномерном течении, как известно, должны выполняться динамические условия совместности, называемые условиями Гюгонио. Пусть теперь $x = \zeta(t)$ - некоторое приближение к траектории разрыва. Подстановка $\zeta(t)$ вместо x в условия Гюгонио приводит к появлению погрешности в соответствующих алгебраических соотношениях. Если эту погрешность возвести в квадрат и проинтегрировать по t в интервале $0 \leq t \leq T$, где ищется решение, то получится неотрицательный функционал $I(\zeta)$. Было предложено искать траекторию разрыва $x = \xi(t)$ как решение задачи минимизации функционала $I(\zeta)$. В § 13 с помощью методов классического вариационного исчисления показано, что погрешность локализации разрыва с помощью метода Миранкера-Пиронно составляет величину $O(h)$. В случае квадратичной искусственной вязкости Неймана-Рихтмайера найдена точная формула для экстремали $\zeta(t)$, доставляющей минимум функционала $I(\zeta)$. В связи с выявленными в § 13 ошибками исходного метода Миранкера-Пиронно в § 14 предложена модификация основного функционала, состоящая в учете информации об аппроксимационной

вязкости разностной схемы с целью повышения точности локализации разрыва. Указанная информация взята по аналогии с § I2 из п.д.п. Модифицированный функционал имеет вид

$$I(\xi) = \int_{t_0}^T \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot [J_k(\xi(t), t) - \dot{\xi}(t)]^2 \right\} dt, \quad (20)$$

где

$$J_k(\xi(t), t) = [\varphi_k(\vec{w}^-(\xi(t), t) - Q_k(\xi(t), t, h, \tau)) - \varphi_k(\vec{w}^+(\xi(t), t) - Q_k(\xi(t), t, h, \tau))] / [w_k^-(\xi(t), t) - w_k^+(\xi(t), t)]. \quad (21)$$

В (20) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - неотрицательные весовые коэффициенты, такие, что $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \infty$. Функции \vec{w}^-, \vec{w}^+ в (21) определяют состояние среды в областях, соответственно, за фронтом и перед фронтом ударной волны; функции Q_1, Q_2, Q_3 в (21) - компоненты вектора \vec{Q} , входящего в выражение для п.д.п. вида $\partial \vec{w} / \partial t + \partial \vec{\varphi}(\vec{w}) / \partial x = \partial Q(x, t, h, \tau) / \partial x$, полученного из разностной схемы, аппроксимирующей систему уравнений Эйлера (7). Выше в § 3 было показано, что точность локализации ударного фронта по $\max q$, где q - искусственная вязкость, вводимая аддитивно в давление, существенно зависит от значений безразмерных коэффициентов, входящих в выражение для q . С другой стороны, в случае локализации разрыва на основе модифицированного функционала от конкретной формы используемой вязкости q требуется только, чтобы она обеспечивала гладкий переход от одного состояния к другому в ударной волне. Тогда результат локализации совпадает с точным положением фронта стационарной ударной волны, как это показано в § I4 в рамках п.д.п. Таким образом, при использовании предложенного функционала имеет место сравнительно более слабая зависимость точности локализации от конкретного вида q , чем в случае дифференциального анализатора § 3, основанного на определении точек максимума искусственной вязкости q .

В § I5 задача определения положения ударной волны на основе результатов сквозного счета сведена к задаче минимизации неотрицательной функции, представляющей собой подынтегральное выражение в модифицированном интегральном функционале из § I4. Показано, что такой алгоритм требует существенно меньших ресурсов оперативной памяти ЭВМ, чем алгоритмы §§ I3, I4. Далее, в § I5 указана связь между процедурой численной минимизации построенной

функции и численным решением обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $\zeta(t)$, входящей в уравнение искомой траектории разрыва $x = \zeta(t)$.

В § I6 описаны два градиентных метода минимизации основного функционала (20)–(21), представляющих собой варианты метода наискорейшего спуска. Исследованы свойства выпуклости основного функционала. Показано, что функционал $I(\zeta)$ выпуклый, если профили в ударной волне имеют вид ступеньки. Приведены примеры применения описанных в §§ I3–I6 методов для локализации ударных волн в ряде задач со стационарными и нестационарными ударными волнами. Эти примеры указывают на существенно более высокую точность локализации при применении оптимизационных методов, описанных в §§ I4–I5.

В § I7 излагаются оптимизационные алгоритмы локализации контактных разрывов в одномерных течениях на основе результатов сквозного счета. Сформулированы требования, которые нужно учитывать при конструировании интегральных функционалов или целевых функций. Функционал наиболее общего вида для локализации контактного разрыва, сконструированный в § I7, имеет вид

$$I(\zeta) = \int_0^T \left[(\dot{\zeta} - u)^2 + \alpha_1 R_1 \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) + \alpha_2 R_2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \alpha_3 R_3 \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dt, \quad (22)$$

где $[0, T]$ – временной промежуток, в котором ищется решение задачи локализации разрыва ($0 < T < \infty$), R_1, R_2, R_3 – непрерывно дифференцируемые функции, такие, что $R_j(z) > 0$, $z > 0$, $j = 1, 2, 3$; $R_1'(z) > 0$, $R_2'(z) > 0$, $R_3'(z) < 0$; $\dot{\zeta}(t) \equiv d\zeta(t)/dt$. В (22) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – постоянные весовые коэффициенты, причем $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Отмечается, что функционал (22) применим и в случае конечных ненулевых градиентов давления и скорости в окрестности контактного разрыва.

В § I7 рассмотрены также вопросы построения оптимизационных алгоритмов выделения слабых разрывов в течениях невязкого газа. При выводе определяющего функционала $I(\zeta)$ использованы известные кинематические и динамические условия совместности, имеющие место на поверхностях слабых разрывов в течениях идеального газа. Полученный в § I7 функционал имеет вид

$$I(\zeta) = \int_0^T (\dot{\zeta}(t) - J(\zeta(t), t))^2 dt, \quad (23)$$

где T - заданная величина, $0 < T < \infty$,

$$J(\zeta(t), t) = u + \alpha_1 \rho [\partial u / \partial x] / [\partial \rho / \partial x] + (\alpha_2 / \rho) \cdot$$

$$[\partial \rho / \partial x] / [\partial u / \partial x] + \alpha_3 \rho c^2 [\partial u / \partial x] / [\partial \rho / \partial x]. \quad (24)$$

В (24) символ $[\partial f / \partial x]$ означает скачок производной $\partial f / \partial x$ (f - любая из величин u, ρ, ρ) на слабом разрыве; c - локальная скорость звука, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - неотрицательные весовые постоянные коэффициенты, причем, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Приводятся примеры выделения слабых разрывов в одномерном нестационарном течении с помощью функционала (23)-(24), которые указывают на высокую точность локализации слабых разрывов с помощью предложенного подхода (соответствующая абсолютная погрешность составляет величину, меньшую, чем шаг h сетки на оси x).

В четвертой главе изложен ряд методов уточнения разностных решений в окрестности сильных разрывов. В начале главы перечислен ряд известных в литературе подходов к решению проблемы повышения точности численных решений в окрестности разрывов: (1) явное выделение разрывов, как это делается в упоминавшемся уже выше методе "подгонки скачка"; (2) использование динамических сеток, автоматически сгущающихся в областях больших градиентов решения; (3) разработка разностных схем сквозного счета, обеспечивающих на заданной пространственной сетке минимальную возможную ширину зоны "размазывания" разрыва.

В § 18 показано, что при решении задач о зарождении ударных волн на равномерной пространственной сетке для достижения приемлемой точности определения места и времени зарождения ударной волны необходимо брать большое (порядка нескольких тысяч) количество узлов сетки, в противном случае формирование стационарного дискретного профиля стационарной ударной волны будет происходить в разностном решении с большим запаздыванием по отношению к истинному моменту образования разрыва. В этой связи в § 19 излагается другой подход к решению рассматриваемой пробле-

мы в рамках использования схем сквозного счета: расчет течения на неравномерной подвижной сетке, адаптирующейся к потоку с учетом положения волны сжатия (или центра размазанной ударной волны). Изложены этапы построения динамической сетки: локализация особенности, периодическая перестройка сетки с учетом положения особенности и сплайн-интерполяция численного решения со "старой" сетки на "новую". Алгоритм § 19 иллюстрируется на примере численного решения скалярного квазилинейного уравнения $u_t + uu_x = 0$. Приводятся результаты расчетов, показывающие, что на такой адаптивной сетке, содержащей около 200 узлов к моменту зарождения скачка, значение относительной погрешности в определении момента образования ударной волны не превышает 4,5%.

В §§ 20–21 ставится и решается с помощью методов нелинейной оптимизации задача об уточнении разностных решений в окрестности контактных разрывов в одномерных нестационарных течениях. При этом разрывы учитываются явно, так что в итоге ширина зон размазывания разрывов составляет 1–2 интервала сеточной сетки. Соответствующие процедуры уточнения выполняются локально, только в окрестности разрывов, и служат только для того, чтобы скорректировать численное решение, полученное по схеме сквозного счета, в окрестности разрывов. Эти локальные процедуры используют вспомогательную локальную подвижную мелкую сетку в окрестности каждого разрыва. Узлы этой сетки сопровождают разрывы при их движении в плоскости (x, t) . Перенос информации с подвижной сетки на фиксированную равномерную сетку, на которой выполняется сквозной расчет поля течения, обеспечивает сохранение полной массы жидкости в расчетной области. Это сохранение массы достигается в результате решения оптимизационной задачи, сформулированной на основе требования минимизации разности между массами жидкости на подвижной сетке и на фиксированной сетке. Это свойство сохранения массы в процедурах уточнения, описываемых в §§ 20–22, составляет их существенное отличие от упоминавшихся во введении вариантов метода "подгонки скачка". Траектории узлов локальной подвижной сетки в окрестности разрывов в совокупности с линиями $t = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ограничивают области Ω_k , имеющие вид параллелограммов в плоскости (x, t) . В пределах каждой из областей Ω_k в случае уточнения решения в окрестности контактного разрыва минимизируется в контексте метода наименьших

квадратов квадратичный функционал

$$I_{\kappa} = \int_{\Omega_{\kappa}} (\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x)^2 dx dt. \quad (25)$$

Смысл обозначений ρ , u_0 в (25) тот же, что и в (12). Функция $\rho(x, t)$ аппроксимируется затем в (25) с использованием полиномиального представления в виде многочлена по степеням x и t . Затем из требования минимума функционала (25) и непрерывного сопряжения аппроксимаций функции $\rho(x, t)$ на границах между соседними областями Ω_{κ} получается система алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Показано, что элементы этой матрицы удовлетворяют требованию диагонального преобладания, поэтому для решения полученной алгебраической системы можно применять эффективный метод прогонки. Как показывают примеры расчетов, приведенные в § 21, включение локальных процедур уточнения, описанных в §§ 20–21, в программы, реализующие схемы сквозного счета, обеспечивает одновременное достижение трех целей: во-первых, не нарушается закон сохранения массы; во-вторых, определяются с достаточно высокой точностью параметры течения на обеих сторонах разрыва и, в-третьих, уточняется положение сильного разрыва. В § 22 на основе метода наименьших квадратов и методов математического программирования сформулирована задача уточнения разностных решений в окрестности фронтов ударных волн в одномерных течениях.

В пятой главе излагаются наиболее общие и универсальные методы автоматического анализа структур двумерных течений невязкого газа. Эти методы основаны на использовании некоторых результатов теории цифровой обработки изображений и теории цифрового распознавания образов. В.В.Русановым в 1973 году впервые было сформулировано положение о том, что для обеспечения более высокого уровня обработки, чем достигнутый, алгоритмы обработки результатов расчетов многомерных задач аэрогидродинамики должны включать алгоритмы распознавания и автоматическую классификацию новых объектов, то есть определенные способности "искусственного интеллекта".

В отличие от дифференциальных анализаторов, описанных в главах 1 и 2, изложенные в главе 5 алгоритмы локализации и классификации разрывов на основе результатов сквозных расчетов не

требуют для своей реализации априорной информации о качественной структуре течения, о приблизительной форме и расположении поверхностей разрывов, о направлении их движения. В начале главы дан краткий обзор дискриминантных методов распознавания образов, использованных в настоящей главе. В § 23 кратко изложены операции, выполняемые на этапе формирования цифрового изображения, которое затем будет введено в систему обработки высшего уровня. Эти операции включают в себя ввод изображения и предварительную обработку изображения. Обсуждаются вопросы улучшения изображений путем применения таких операций предварительной обработки, как сглаживание и реставрация цифровых изображений поля течения. Приводятся некоторые результаты численных экспериментов по восстановлению кусочно-постоянных функций с помощью предложенной в § 23 модификации метода сглаживания KAV E A. Розенфельда. Метод KAV E — "усреднение по K ближайшим соседям" — уменьшает амплитуду паразитических осцилляций численного решения при одновременном укрупнении профилей в зонах размазывания сильных разрывов. Поэтому метод KAV E иногда относят в литературе к методам реставрации цифровых изображений. Численные результаты, представленные в § 23, были получены при расчете конвективного переноса контура чисто контактного разрыва по схеме Мак-Кормака 1969 г., аппроксимирующей уравнение

$$\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x + v_0 \partial \rho / \partial y = 0 \quad (26)$$

в сочетании с модифицированным методом KAV E. В (26) u_0, v_0 — компоненты постоянного вектора скорости жидкости. В § 23 отмечено, что плато постоянных значений $\rho = 3$ (точное решение) воспроизводилось в результате реставрации с погрешностью менее 1%.

Сформулированы ограничения, которые должны учитываться в алгоритмах реставрации произвольных разрывных газодинамических профилей: (1) законы сохранения массы, импульса и энергии; (2) неотрицательность плотности, давления и удельной внутренней энергии; (3) возрастание энтропии на ударных волнах.

Наряду с двумерными числовыми массивами сеточных значений плотности ρ , составляющих скорости u, v и давления газа p , входными данными для системы классификации особенностей в исследуемом течении газа являются координаты (x_m, y_m) , $m = 1, \dots, N_4$ ($N_4 > 1$) точек, некоторые из которых могут принадле-

жать линиям сильных разрывов. Координаты (x_m, y_m) вычисляются на этапе сегментации изображения, кратко описываемом в § 24. Здесь использованы градиентные операторы, включающие разностное дифференцирование по пространственным переменным. Таким образом, имеется некоторое сходство с дифференциальными анализаторами глав I и 2, которое более подробно обсуждается в п. 24.2. Для осуществления сегментации цифрового изображения, заданного в узлах прямоугольной равномерной сетки в плоскости декартовых прямоугольных координат (x, y) , в п. 24.1 использован известный в теории цифровой обработки изображений детектор Собела, в котором величина g_{ij} градиента функции $\rho(x, y, t)$ в точке (x_{ij}, y_{ij}) -узле сетки - вычисляется по формулам

$$S_1 = H_1 * F_3(\rho), \quad S_2 = (h_2/h_1) H_2 * F_3(\rho), \quad (27)$$

$$g_{ij} = |S_1| + |S_2|, \quad (28)$$

где $F_3(\rho)$ - окно изображения размером 3×3 , центрированное в пикселе ρ_{ij} ,

$$F_3(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_{i-1, j+1} & \rho_{i, j+1} & \rho_{i+1, j+1} \\ \rho_{i-1, j} & \rho_{i, j} & \rho_{i+1, j} \\ \rho_{i-1, j-1} & \rho_{i, j-1} & \rho_{i+1, j-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

H_1, H_2 - маски Собела:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

символ $*$ в (27) обозначает операцию дискретной свертки маски H_k , $k = 1, 2$, с окном изображения (29). Ориентация вектора градиента в узле (x_{ij}, y_{ij}) вычисляется по формуле

$$\alpha_{ij} = \arctg(S_1/S_2). \quad (31)$$

Далее в п. 24.1 кратко описывается программно реализованная многоэтапная процедура обнаружения линий разрывов. На первом

этапе этой процедуры вычисляются величины градиента g_{ij} по формулам (27)–(30) во всех точках (i, j) анализируемого цифрового изображения. На втором этапе определяются точки (i, j) , удовлетворяющие пороговому ограничению $g_{ij} > T$, где T – значение порога, которое вычислялось по способу, предложенному Робинсоном. На третьем этапе осуществляется уточнение контуров разрывов с использованием метода подавления немаксимумов Розенфельда. На четвертом этапе удаляются изолированные артефакты.

В п. 24.2 излагается метод оценивания точности результатов сегментации цифровых изображений с помощью градиентных детекторов. Этот метод основан, как и в главе I, на использовании первого дифференциального приближения разностной схемы. Иллюстрация метода осуществлена в п. 24.2 на примере анализа точности локализации с помощью детектора Собела прямоугольного контура чисто контактного разрыва при расчете его адвекции с помощью схемы типа "жидкость в ячейке", аппроксимирующей уравнение (26) с первым порядком точности. Получен явный вид решения уравнений п.д.п. для произвольного $t > 0$, выражающийся через произведение некоторых разностей значений функции ошибок $erf(\xi)$. Из анализа этого решения получены оценки точности локализации при использовании детектора Собела. Эти оценки указывают на существенную анизотропию свойств размазывания контактных разрывов в схеме "жидкость в ячейке". В конце п. 24.2 обсуждается возможность обобщения описанных в §§ 21–22 главы 4 методик уточнения разностных решений в окрестности разрывов на случай двух пространственных переменных с использованием некоторых алгоритмов сегментации, позволяющих локализовать разрывы с погрешностью, меньшей, чем размеры одного пикселя.

В п. 24.3 осуществлено обобщение градиентных операторов сегментации изображения на случай, когда значения функции интенсивности изображения $\rho(x, y, t)$ заданы в узлах произвольной криволинейной сетки. Иллюстрация соответствующего алгоритма сегментации осуществлена на примере детектирования фронтов ударных волн в трансзвуковом потенциальном течении около крылового профиля NASA OOI2. Численное решение уравнения для потенциала скорости $\varphi(x, y)$, имеющего вид $(\rho\varphi_x)_x + (\rho\varphi_y)_y = 0$, где

$$\rho = [1 - ((\gamma - 1)/(\gamma + 1)) \cdot (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)]^{1/(\gamma - 1)},$$

γ - постоянная в уравнении состояния (2), выполнялось по модифицированной схеме приближенной факторизации AF2 Холста на криволинейной сетке типа C .

Реализация дискриминантных методов распознавания образов связана с использованием некоторого набора признаков, характеризующих классифицируемые объекты. В § 25 построены семь количественных признаков a_{1m}, \dots, a_{7m} для описания различных типов особенностей в течениях невязкого газа, $m = 1, \dots, N_4$ ($N_4 > 1$). При выводе расчетных формул этих признаков использованы известные динамические условия совместности на поверхностях разрывов (которые применялись также и в предыдущих главах), некоторые свойства адиабаты Гюгонио и свойство возрастания энтропии на ударных волнах. Например, признак a_{2m} вычислялся по формуле

$$a_{2m} = \text{sign}(\bar{\rho}_{i_1, j_1} - \bar{\rho}_{i_2, j_2}) + \text{sign}(\bar{\varepsilon}_{i_1, j_1} - \bar{\varepsilon}_{i_2, j_2}). \quad (32)$$

Индексы (i_1, j_1) и (i_2, j_2) в (32) соответствуют точкам, лежащим на разных сторонах линии разрыва на прямой, приблизительно перпендикулярной ориентации линии разрыва в точке (i, j) . Направление указанного перпендикуляра определялось по углу \angle_{ij} , вычисляемому с помощью формулы (31). Величины $\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}$ в точках с индексами, указанными в (32), вычислялись в рамках поисковой интерполяционной процедуры, служащей для приближенного определения величин ε, ρ, ρ , характеризующих состояния газа на обеих сторонах исходного неразмazanного сильного разрыва. В этой процедуре сначала вычислялись на каждой стороне поверхности разрыва по шесть наборов величин $(\rho, \rho, \varepsilon)$, получающихся при различных удалениях вдоль нормали от рассматриваемой поверхности разрыва. Поиск $\bar{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\varepsilon}$ прекращался, как только находились такие значения $(\bar{\rho}_{i_1, j_1}, \bar{\rho}_{i_1, j_1}, \bar{\varepsilon}_{i_1, j_1})$ и $(\bar{\rho}_{i_2, j_2}, \bar{\rho}_{i_2, j_2}, \bar{\varepsilon}_{i_2, j_2})$, которые характеризуют изменение этих величин при переходе через разрыв, согласованное по знаку со скачком энтропии на разрыве. В § 25 изучены свойства дисперсии выведенных семи признаков и с учетом результатов этого изучения осуществлена нормировка некоторых из признаков с целью уменьшения расстояний

в пространстве признаков между точками из одного класса.

В §§ 26–28 описаны четыре алгоритма классификации особенностей в двумерных течениях невязкого газа: классификатор по минимуму расстояния (§ 26), алгоритм последовательной классификации особенностей в неизэнтропических течениях (§ 27), алгоритм последовательной классификации для выделения ударных волн в потенциальных течениях (§ 27), алгоритм, основанный на использовании функций признаков (§ 28). Эталонные образы для классификатора по минимуму расстояния (§ 26) предложено находить с помощью осуществления предельного перехода при $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ в формулах для признаков, где h_1 , h_2 – шаги равномерной расчетной сетки вдоль осей x , y , соответственно; τ – временной шаг в используемой разностной схеме, по которой были получены сеточные значения величин ρ , u , v , p . Алгоритм последовательной классификации, описанный в § 27, позволяет решать те же задачи классификации, что и алгоритм § 26, при меньшем (на 15+25%) объеме вычислений. При формулировании признаков для классификации изэнтропических ударных волн в потенциальных течениях в § 27 использовано энтропийное условие вида

$$p_1 + \rho_1 u_{n1}^2 - (p_2 + \rho_2 u_{n2}^2) \geq 0, \quad (33)$$

которое опубликовал в 1978 году Ж.-Ж.Шатто. В (33) нижний индекс "1" относится к состоянию газа за фронтом ударной волны, а индекс "2" – к состоянию перед фронтом; u_n – нормальная (по отношению к поверхности разрыва) составляющая скорости газа. При конструировании функций признаков в § 28 за основу взята одна из простейших потенциальных функций, используемых в методе потенциальных функций в теории распознавания образов.

Сравнительный анализ эффективности перечисленных алгоритмов распознавания выполнен в п. 29.1 и § 29. Для этого анализа был сконструирован специальный тест, позволяющий исследовать уровни ошибок классификации при различных отношениях сигнал/шум (С/Ш). Главный вывод, который сделан в конце п. 29.1, состоит в том, что в случае использования осциллирующих разностных схем, для которых величина С/Ш является конечной, порядка $10 \leq \text{С/Ш} \leq 100$, обе схемы классификации особенностей в неизэнтропических течениях, описанные в §§ 26, 27, дают сравнимые уровни оши-

бок классификации. Вторым выводом является то, что для того, чтобы обеспечить наименьший уровень ошибок классификации особенностей с помощью двух указанных схем, нужно применять в расчетах газодинамической задачи монотонную разностную схему, при использовании которой все разрывы размазываются не более, чем на три-четыре ячейки пространственной сетки.

В пп. 29.2-29.5 § 29 представлены результаты применения разработанных алгоритмов классификации особенностей при автоматическом анализе структуры течений в нескольких прикладных двумерных задачах газовой динамики, включающих трансзвуковое обтекание крылового профиля, цилиндрический распад разрыва, дифракцию ударной волны при ее набегании на клин, сверхзвуковое течение в канале, имеющем скачок поперечного сечения. Во всех перечисленных задачах проведено сравнение результатов локализации особенностей, полученных с помощью методов, описанных выше в данной главе, с точными решениями либо с результатами локализации, полученными другими авторами с помощью различных подходов. Приводятся соответствующие результаты расчетов в форме картин расположения различных типов особенностей (представленных графопостроителем различными символами), аксонометрических проекций поверхностей плотности $\rho(x, y, t)$ для выбранных моментов времени t и картин изолиний плотности. В конце § 29 приводятся соображения относительно возможности обобщения разработанных в главе 5 методик локализации и классификации особенностей на случай трехмерных течений.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

О с н о в н ы е р е з у л ь т а т ы и в ы в о д ы

1. Предложена методика исследования точности локализации ударных волн на основе численных решений одномерных задач газовой динамики, получаемых по конечно-разностным схемам сквозного счета, и осуществлено обоснование этой методики.

2. Предложен класс алгоритмов локализации ударных волн в одно- и двумерных течениях невязкого газа - дифференциальные анализаторы ударных волн, и исследована точность этих алгоритмов.

3. Предложена методика исследования точности локализации контактных разрывов в численных решениях, получаемых по конечно-

разностным схемам сквозного счета одномерных задач газовой динамики, и осуществлено обоснование этой методики.

4. Предложен класс алгоритмов локализации контактных разрывов в одно- и двумерных течениях невязкого газа - дифференциальные анализаторы контактных разрывов - и исследована точность этих алгоритмов.

5. Предложено понятие K -согласованности разностных схем для задач динамики невязкого газа. Показано, что отсутствие свойства K -согласованности может приводить к большим ошибкам в давлении и скорости в контактной полосе при численном решении задач с контактными разрывами. Предложены и обоснованы методы уменьшения или полного устранения указанных ошибок.

6. Исследована точность оптимизационного метода Миранкера-Пиронно локализации ударных волн на основе численных решений одномерных задач газовой динамики, получаемых с помощью конечно-разностных схем сквозного счета. Предложена модификация основного функционала, позволяющая существенно повысить точность локализации ударных волн.

7. Предложены и исследованы оптимизационные алгоритмы локализации контактных разрывов и слабых разрывов на основе численных решений одномерных задач газовой динамики, получаемых с помощью конечно-разностных схем сквозного счета.

8. Предложены методы повышения точности разностных решений в окрестности сильных разрывов в одномерных течениях невязкого газа. Эффективность методов подтверждена примерами расчетов задач о зарождении ударной волны и движении многих контактных разрывов.

9. Предложены методы классификации особенностей в двумерных течениях невязкого газа, рассчитываемых с помощью конечно-разностных схем сквозного счета, на основе применения методов цифровой обработки изображений и цифрового распознавания образов. Осуществлено обоснование выбранной системы признаков и эталонных образов.

10. Осуществлена программная реализация разработанных методов классификации особенностей в двумерных течениях невязкого газа. Исследованы уровни ошибок классификации по предложенным схемам классификации при различных отношениях сигнал/шум. Продемонстрирована эффективность созданных программ классификации

особенностей при их применении для автоматического анализа структур ряда сложных двумерных течений газа.

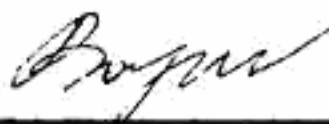
Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной механики Сибирского отделения АН СССР. Автор глубоко благодарен академику АН СССР Н.Н.Яненко, который вплоть до своей кончины в 1984 г. проявлял внимание к исследованиям, результаты которых кратко изложены выше. Автор также выражает глубокую признательность члену-корреспонденту АН СССР В.Г.Дулову за поддержку исследований по разработке методов распознавания образов применительно к двумерным задачам вычислительной гидродинамики. На разных этапах исследования работа велась совместно с В.М.Фоминим, З.Узаковым и В.М.Крепким. Всем этим товарищам, а также коллективу отдела аэродинамики и семинара Института диссертант благодарен за помощь и внимание.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985. - 224 с.
2. Яненко Н.Н., Ворожцов Е.В., Фомин В.М. Дифференциальные анализаторы ударных волн//Докл. АН СССР. - 1976. - Т. 227. - № 1. - С. 50-53.
3. Fomin V.M., Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. Differential analysers of shock waves: theory//Computers and Fluids. - 1976. - V. 4. - N 3/4. - P. 171-183.
4. Ворожцов Е.В., Фомин В.М., Яненко Н.Н. Дифференциальные анализаторы ударных волн. Приложения теории//Численные методы механики сплошной среды.-Новосибирск, 1976.-Т.7.-№ 6.-С.8-23.
5. Ворожцов Е.В. Численные тесты дифференциальных анализаторов ударных волн//Численные методы механики сплошной среды.- Новосибирск, 1977. - Т. 8. - № 2. - С. 12-27.
6. Яненко Н.Н., Ворожцов Е.В., Ковеня В.М. и др. О некоторых методах численного моделирования течений сложной структуры// VI Международ. конференция по численным методам в гидродинамике. Тбилиси, 20-25 июня 1978 г.-Т.П.-М.: 1978.-С. 211-224.
7. Яненко Н.Н., Ворожцов Е.В. К теории дифференциальных анализаторов контактных разрывов//Докл. АН СССР.-1979.-Т.247. - № 1. - С. 48-52.
8. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. On some algorithms for shock wave recognition by shock-capturing computational results// Computers and Fluids. - 1980. - V. 8. - N 3. - P. 313-326.
9. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. О свойстве К-согласованности разностных схем газодинамики//Докл. АН СССР. - 1981. - Т. 259. - № 1. - С. 16-24.
10. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. On the theory of differential analysers of contact discontinuities in one-dimensional flows//Computers and Fluids. - V. 9. - N 1. - P. 1-32.
11. Yanenko N.N., Vorozhtsov E.V. Differential analysers of

- strong discontinuities in one-dimensional gas flow//Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow (Eds. C.Taylor, K.Morgan). - Swansea, 1981. - P. 59-96.
12. Vorozhtsov E.V. On the influence of shape and dimensions of particles on the properties of the modified particle-in-cell method//Computers and Fluids.-1981.-V.9.-N 3. - P. 313-326.
 13. Ворожцов Е.В., Крепкий В.М., Узаков З. Об одном оптимизационном подходе в задачах локализации ударных волн по результатам сквозного счета//Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1981. - Т. 12. - № 4. - С. 30-47.
 14. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. Одномерная теория контактной полосы. - Новосибирск, 1981. - 47 с. - (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 45).
 15. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. On the K-consistence property of difference schemes of gas dynamics. I. An analysis of first-order schemes//Computers and Fluids. - 1982. - V. 10. - N 3. - P. 181-204.
 16. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. On the K-consistence property of difference schemes of gas dynamics. II. An analysis of second-order schemes//Computers and Fluids. - 1982. - V. 10. - N 3. - P. 205-222.
 17. Ворожцов Е.В. Об уточнении разностных решений в окрестности разрыва. - Новосибирск, 1983. - 52 с. - (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 13).
 18. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. On the construction of K-consistent difference schemes of gas dynamics//Computers and Fluids. - 1983. - V. 11. - N 3. - P. 231-249.
 19. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. On some optimization procedures for shock localization//Int. J. for Numer. Methods in Fluids. - 1984. - V. 4. - N 5. - P. 477-496.
 20. Ворожцов Е.В. О дифференциальных анализаторах сильных разрывов//Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1984. - Т. 15. - № 2. - С. 42-48.
 21. Ворожцов Е.В. О локализации разрывов в разностных решениях с помощью детектора Собела. - Новосибирск, 1985. - 53 с. - (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 12).
 22. Ворожцов Е.В. Выделение линий разрывов в разностных решениях методами распознавания образов//Школа-семинар социалистических стран "Вычислительная аэрогидромеханика", Самарканд, 25-31 октября 1985 г. - М., 1985. - С. 30-34.
 23. Ворожцов Е.В. Классификация разрывов в течениях газа как задача распознавания образов. - Новосибирск, 1986. - 53 с. - (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 23).
 24. Vorozhtsov E.V. On shock localization by digital image processing techniques//Computers and Fluids. - 1987. - V. 15. - N 1. - P. 13-45.
 25. Vorozhtsov E.V., Mazurik S.I. Application of artificial intelligence techniques for the classification of discontinuities in gases and for the stability analysis of difference schemes//Soviet Union - Japan Symposium on Computational Fluid Dynamics, Khabarovsk, Sept., 9-16, 1988. Book of Abstracts. - Vladivostok, 1988. - P. 124-125.

Ответственный за выпуск



Ворожцов Е.В.

Подписано к печати 3.07.89г.

МН 12074

Усл.печ.л. 2.0

Усл.изд.л. 2.0

Тираж 100 экз.

Заказ № 48 . Формат бумаги 60x84/16. Бесплатно

Отпечатано на ротапинтере ИГиМ СО АН СССР,
630090, Новосибирск-90, ул.Институтская, 4/1