АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕПЛОФИЗИКИ

На правах рукописи
УДК 533.6.011.8:532.517.4

Григорьев Юрий Николаевич

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА И ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

01.02.05 - механика жидкостей, газа и плазмы

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 1989

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Гольдштик М. А.
доктор физико-математических наук, профессор Рыжов О. С.
доктор физико-математических наук, ст. научн. сотр. Мирошин Р.Н.

Ведущая организация: Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского

Защита состоится ____ _______________ 1989 года в _____ часов на заседании специализированного совета Д 002.65.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Институте теплофизики СО АН СССР по адресу: 630090, г.Новосибирск-90, пр. Академика Лаврентьева, I.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теплофизики СО АН СССР

Автореферат разослан ____ _______________ 1989 г.

Ученый секретарь специализированного совета, доктор технических наук, профессор Н. А. Рубцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Статистические модели аэрогидродинамики составляют обширное направление современных исследований в области механики жидкости и газа. В диссертации, развивающей это направление, рассматриваются статистическое моделирование задач аэродинамики разреженного газа (РГ) при конечных числах Кнудсена, кинетические модели поступательной релаксации в газе в диапазоне надтепловых энергий, а также статистические вихревые модели гидродинамической турбулентности.

Основным инструментом и одновременно предметом исследования, создающими методическое единство работы, являются кинетические уравнения, описывающие неравновесные статистические ансамбли частиц различной природы. Бо́льшая часть задач, вошедших в диссертацию, решается численно или аналитически на уровне кинетических уравнений, что в ряде случаев требовало разработки оригинальных методов. Параллельно изучались некоторые математические свойства этих уравнений.

Актуальность. Развитие научной проблематики современной авиационной и космической техники, новых химических технологий, охраны окружающей среды подняло на новый уровень требования к достоверности расчетных исследований и теоретических моделей течений газов и жидкостей, неравновесность которых связана с разреженностью, физико-химическими процессами на молекулярном уровне, развитыми турбулентными эффектами и другими осложняющими факторами. В аэродинамике разреженного газа этот переход определяется постоянным усложнением функций летательных аппаратов и вакуумных технологических установок. В других областях он в значительной мере стимулируется новыми физическими явлениями, открытыми в последнее двадцатилетие, такими как когерентные структуры в турбулентности или сложные релаксационные процессы в газах, и перспективами их использования для управления потоками. Анализ процессов, требующих описания, первые полученные результаты и содержательные аналогии из других областей науки показывают актуальность использования здесь статистических концепций, приближающихся к уровню "первых принципов", в частности, кинетических уравнений, и развития и совершенствования на их основе статистических моделей аэрогидродинамики и методов их анализа.

Для задач динамики разреженного газа (РГ) в области конечных чисел Кнудсена принятыми моделями являются кинетические уравнения теории газов. В период становления вычислительной аэродинамики РГ в конце 60-х годов в ней наметилось лидирующее положение методов статистического моделирования, что связано со статистической природой кинетических уравнений и высокой размерностью решаемых задач. Однако известные к тому времени статистические алгоритмы требовали столь больших объемов оперативной памяти и затрат машинного времени, которые исключали возможность их реализации для решения задач аэродинамики РГ при конечных числах Кнудсена на ЭВМ класса БЭСМ-6 даже в относительно простых плоской и осесимметричной постановках. В этой связи для научного обеспечения практических разработок суборбитальной аэродинамики спускаемых аппаратов и их моделирования в вакуумных аэродинамических трубах требовалось создание эффективного метода статистического моделирования, который позволял бы получать адекватные физические результаты в задачах динамики РГ для всего диапазона по числу Кнудсена и мог быть использован для математических расчетов аэродинамики тел в переходном режиме на отечественных ЭВМ типа БЭСМ-6.

Гиперзвуковой полет в верхних слоях атмосферы, суборбитальные маневры аппаратов типа "Шаттл", высокоскоростные потоки с теплообменом в различных технологических установках сопровождаются физико-химическими процессами барьерного типа, протекание которых определяется неравновесным распределением молекул газа по поступательным скоростям в области надтепловых энергий. В связи с этим на стыке аэродинамики с физико-химической кинетикой, течениями многофазных сред, методами физической диагностики газовых потоков возникли задачи, требующие вычисления функций распределения (ФР) вплоть до энергий молекул, на порядок превышающих тепловые. Для исследования задач данного круга требуется разработка методов точного численного интегрирования кинетических уравнений типа Больцмана для больших интервалов молекулярных энергий и времени. Альтернативным путем здесь может стать построение упрощенных кинетических моделей, специально предназначенных для расчетов в этой области. Для апробирования создаваемых прецизионных численных методов и проверки адекватности приближенных моделей поступательной релаксации необходимо построение точных решений кинетических уравнений теории газов и их моделей, в частности, инвариантных решений. В совокупности эти разработки должны позволить приступить к систематическим исследованиям глобальной картины релаксации и ее влияния на протекание пороговых процессов, которые оставались до последнего времени мало изученными.

В последние годы методы статистической механики, в том числе аппарат кинетических уравнений для ансамблей точечных (дискретных) вихрей с невязким взаимодействием, стали активно использоваться при моделировании гидродинамической турбулентности. Для развития этих подходов важным является дальнейшее совершенствование и исследование возможностей статистических и динамических моделей дискретных вихрей, особенно в трехмерном случае. Исследования организованных или когерентных вихревых структур (КС) в турбулентных потоках выдвигают вопрос о создании концепции, объединяющей детерминированную динамику крупных и стохастику малых масштабов. Для систематизации и обобщения экспериментальных данных и результатов численных исследований и введения их в практические расчеты турбулентных течений необходимо также развитие простых аналитических моделей КС.

Изложенные проблемы развития статистических моделей и методов в динамике РГ и гидродинамической турбулентности определяют актуальность исследований и результатов, представленных в диссертации.

Цель работы заключается в обосновании и создании статистических моделей и методов для численных и аналитических исследований течений газов и жидкостей в условиях сильной неравновесности на макроскопическом и молекулярном уровнях и решении конкретных задач на этой основе.

Научная новизна. В работе получены и выносятся на защиту следующие новые научные результаты:

- строгое построение итерационных статистических алгоритмов для нелинейных кинетических уравнений теории газов, разработанный на этой основе экономичный численный метод статистического моделирования течений разреженных газов при конечных числах Кнудсена и анализ его приложения к расчету аэродинамических характеристик и структуры полей гидродинамических величин при плоском и осесимметричном обтекании ряда тел простой аэродинамической формы во всем диапазоне переходного режима по числу Кнудсена;

- исследование некоторых математических свойств различных кинетических моделей поступательной релаксации, включая их полный теоретико-групповой анализ и исследование отдельных классов инвариантных решений;

- эффективный спектральный алгоритм прямого численного интегрирования задачи однородной релаксации (релаксационного этапа в схеме расщепления по физическим процессам) для уравнения Больцмана с (псевдо) максвелловской моделью молекул и нелинейным (линеаризованным, линейным) интегралом столкновений и полученные на его основе количественные оценки свойств изотропной поступательной релаксации ряда характерных ФР, в частности, эффекта немонотонной максвеллизации и его влияния на скорость кинетических процессов с энергетическим барьером;

- исследование качества аппроксимации релаксационных процессов в надтепловой области кинетической моделью с приближенным асимптотическим интегралом столкновений;

- регуляризованная модель точечных вихрей в трехмерном пространстве с невязким взаимодействием и гамильтоновой динамикой в переменных "радиусы - векторы - импульсы Лэмба" и ее приложения к моделированию развитой турбулентности;

- диаграммная техника для статистического ансамбля прямолинейных вихревых нитей в идеальной жидкости и вывод на ее основе эволюционного уравнения для двумерной организованной завихренности, содержащего в явной форме эффект знакопеременной вихревой вязкости;

- эвристическое обоснование применимости статистического вариационного принципа максимума информационной энтропии к моделированию двумерной организованной завихренности в турбулентных течениях и результаты, полученные на его основе для сдвиговых течений.

Практическая ценность. Строгое построение итерационных статистических алгоритмов для нелинейных кинетических уравнений теории газов положило начало обоснованию и классификации методов статистического моделирования в динамике РГ и используется в монографиях по приложениям методов Монте-Карло. Развитый на этой основе численный метод позволил получить ряд результатов по аэродинамике РГ при конечных числах Кнудсена, которые использовались и могут быть использованы в практике заинтересованных НИИ и КБ. Успешный опыт эффективного статистического моделирования распределений гидродинамических величин на основе кинетических уравнений с релаксационным интегралом столкновений представляет интерес для использования в других областях, где возникают подобные уравнения, например, в теории турбулентности.

Проведенные исследования кинетических моделей однородной надтепловой релаксации систематизируют и углубляют представления об особенностях протекания кинетических процессов в данной области и путях их упрощенного моделирования, открывают возможность управления пороговыми процессами, развивающимися на фоне поступательной релаксации. Разработанный эффективный спектральный алгоритм может быть использован для решения широкого круга кинетических задач, требующих точного вычисления функции распределения. Методология теоретико-группового анализа интегро-дифференциальных уравнений нашла и будет находить применение при построении инвариантных решений таких уравнений, возникающих в других разделах механики.

Регуляризованная модель точечных вихрей с дипольным взаимодействием и развитый на ее основе экономичный алгоритм типа "вихри в ячейке" для пространственного случая может быть использован для бессеточного лагранжева метода расчета течений при больших числах Рейнольдса, а также для моделирования эффектов мелкомасштабной турбулентности, например, на подсеточных масштабах в методе крупных вихрей.

Статистический вариационный принцип, предложенный для построения квазистационарных моделей организованной завихренности в плоских и осесимметричных турбулентных течениях, позволяет описывать их достаточно простыми уравнениями, согласованными с любой наперед заданной информацией о свойствах данного течения. В отсутствии развитой теории когерентных структур принцип может стать эффективным инструментом систематизации и обобщения экспериментальных и численных данных для использования их в практике расчетов турбулентных течений.

Достоверность полученных результатов. Теоретические результаты диссертации получены на основе строгих математических методов, взятых из общей теории методов Монте-Карло, группового анализа, качественной теории дифференциальных уравнений, Фурье-анализа.

Предлагаемые в диссертации упрощенные статистические модели для задач аэродинамики РГ в переходном режиме, расчета кинетических процессов в области надтепловых энергий, построения распределений организованной завихренности в турбулентных потоках обоснованы анализом исходной постановки проблемы, сопоставлением получаемых на их основе результатов с эталонными аналитическими, численными и экспериментальными данными для соответствующих задач, подкрепляются содержательными аналогами из других областей механики и физики, физически непротиворечивыми косвенными следствиями.

Достоверность численных результатов, полученных на основе развиваемых численных методов, подтверждается тестами на точных решениях, сравнениями с численными результатами и экспериментальными данными других авторов, а также различными приемами внутреннего контроля точности вычислений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и представлены в трудах ХУ, ХУI, ХУП Международных симпозиумов по современным проблемам и методам механики жидкостей (Польша, 1981, 1983, 1985 гг.); УП Международного симпозиума по численным методам в механике жидкости (Стэнфорд, 1979); ХШ, ХIУ Международных симпозиумов по динамике разреженных газов - (1982, 1984 гг.); Ш Всесоюзной конференции по методам Монте-Карло, (1971 г.); I, П, IУ-IХ Всесоюзных школах-семинарах по методам механики сплошных сред (1971, 1973, 1977, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987 гг.); IУ, У, УШ, IХ Всесоюзных конференциях по динамике разреженных газов (1975, 1978, 1985, 1987 гг.); П, Ш Всесоюзных конференциях по проблемам турбулентных течений (1984, 1986 гг.); 10-ом - 12-ом Рижских совещаниях по магнитной гидродинамике (1982, 1984, 1987 гг.), а также на семинарах ВЦ АН СССР, ЦАГИ, межинститутском семинаре СО АН СССР по проблеме "Турбулентность" - под руководством академика С. С. Кутателадзе; ВЦ СО АН СССР - под руководством чл.-корр. Г. А. Михайлова, ИТПМ СО АН СССР - под руководством академика Н. Н. Яненко, ИГ СО АН СССР - под руководством академика Л. В. Овсянникова.

Диссертационная работа в целом докладывалась на семинарах ВЦ АН СССР (руководитель - проф. О. С. Рыжов), НИИ ПМ им. В. И. Смирнова при ЛГУ (рук. - проф. Р. Н. Мирошин), ИТПМ СО АН

СССР (рук. - член-корр. Н. А. Желтухин и проф. В. М. Ковеня), ИТФ СО АН СССР (рук. - академик В. Е. Накоряков), 20-го отделения ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского (рук. - проф. М. Н. Коган).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из Предисловия, Введения, шести глав, общего Заключения, списка цитированной литературы и иллюстраций. Общий объем диссертации составляет 420 страниц, из которых 298 страниц занимает основной машинописный текст, а остальные содержат 114 рисунков, 4 таблицы, библиографию из 301 наименования на 24 страницах, и некоторые вспомогательные материалы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В Предисловии аннотированы статистические модели, изучаемые в диссертации, разработки и результаты, которые выносятся на защиту, а также система организации материала.

Во Введении "Некоторые статистические модели аэрогидродинамики и методы их исследования" дана общая характеристика проблем современной механики жидкостей и газа, требующих использования статистических концепций и подходов, приближенных к уровню "первых принципов". Составляющие его три параграфа содержат обзор по статистическому моделированию течений РГ в переходном режиме, кинетическим моделям поступательной релаксации в газах, статистическим вихревым моделям гидродинамической турбулентности. Каждый параграф завершается выводами, из которых логически вытекают постановки соответствующих задач, рассматриваемых в диссертации, и аннотациями полученных для них результатов.

В Главе I "Построение и анализ итерационных статистических алгоритмов для нелинейных кинетических уравнений" излагается конструктивный подход к созданию экономичного численного метода статистического моделирования задач динамики РГ при конечных числах

В § I дается вывод итерационных алгоритмов М-К для нелинейного кинетического уравнения Больцмана и класса модельных кинетических уравнений типа Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК), имеющих следующую структуру:

$$\bar{v}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + f\,J_1(f) = J_2(f,f), \qquad (I)$$

где $f(\bar{r}, \bar{v})$ – ФР газовых молекул по поступательным скоростям, а остальные обозначения являются общепринятыми (см., например, известную монографию М. Н. Когана).

П. I.I. имеет вводный характер и содержит необходимые сведения из теории весовых статистических оценок произвольного линейного функционала от решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\psi(\bar{x}) = \int d\bar{x}_1 K(\bar{x}_1, \bar{x}) \psi(\bar{x}_1) + \psi_1(\bar{x}) \qquad (2)$$

В п. I.2 проводится строгое построение итерационного статистического алгоритма, ранее эвристически введенного Heviland J.(1962), непосредственно исходя из постановки стационарной краевой задачи внешнего обтекания тела конечных размеров для нелинейного уравнения Больцмана. При этом асимптотическое условие на ФР в невозмущенном потоке переносится на условную внешнюю границу области течения. Обращением оператора левой части в (I) с учетом граничных условий вводится уравнение вида (2) для последовательности итераций с интегральным оператором, определенным во всем фазовом пространстве задачи. Вероятностная трактовка ядра оператора и свободного члена в полученном уравнении с привлечением некоторых результатов из теории М-К для (2) позволяет утверждать, что процесс статистического моделирования (Heviland J. 1962) дает приближенное решение стационарной краевой задачи для уравнения Больцмана (I) итерациями специального вида, каждая из которых вычисляется методом М-К для эквивалентного интегрального уравнения в форме (2). При этом используемая статистическая оценка ФР является несмещенной в каждой итерации.

В методическом отношении здесь было важным установление связей между отдельными актами имитационного статистического алгоритма и элементами интегро-дифференциального кинетического уравнения для типичной задачи аэродинамики РГ, что позволило строго анализировать и строить родственные статистические алгоритмы.

В п. I.3, в частности, проанализированы алгоритмы, предложенные как упрощенная модификация алгоритма Хэвиленда (Perlmutter M., 1967) и для слабо неравновесных течений РГ (Горелов С. В., Коган М. Н., 1968). В результате была строго выявлена их связь с кинетическим уравнением Больцмана и показано, что применяемые в них оценки макропараметров относятся к классу несмещенных "весовых" оценок, используемых для уравнений типа (2) в общей теории М-К.

В п. I.4 изложено строгое построение итерационного статистического алгоритма для кинетических уравнений типа БГК, для которых в (I)

$$J_1(f) \equiv \nu([M]_\nu), \qquad J_2(f,f) \equiv \nu([M]_\nu) f_+(\bar r, \bar v, [M]_+), \quad (3)$$

где $[M]_\nu$, $[M]_+$ – некоторые конечные наборы моментов ФР. Необходимая линеаризация достигалась введением итерационного процесса

$$\bar v \frac{\partial f^{(K)}}{\partial \bar r} + \nu([M]_\nu^{(K-1)}) f^{(K)} = \frac{f_+([M]_+^{(K-1)})}{n^{(K-1)}} \nu([M]_\nu^{(K-1)}) \int d\bar v_1 f^{(K)}(\bar r, \bar v_1). \quad (4)$$

Последовательность преобразований, аналогичная п. I.2, позволяет перейти от краевой задачи для (4) к интегральному уравнению вида (2) для функции плотности столкновений $\psi^{(K)}(\bar x) = \nu([M]_\nu^{(K-1)}) f^{(K)}(\bar x)$. Из вероятностного анализа полученного уравнения следует, что итерационный статистический алгоритм для (I), (3) не требует вычисления и запоминания больших массивов значений ФР в двух последовательных приближениях (сравни Heviland J. 1962) и позволяет ограничиться переработкой сокращенной информации в виде моментов $[M]_\nu, [M]_+$ ФР.

Возможность обобщения этого построения продемонстрирована на примере системы модельных кинетических уравнений для бинарной смеси газов

$$\bar v \frac{\partial f_i}{\partial \bar r} = \nu_{ii}(f_{ii,+} - f_i) + \nu_{ij}(f_{ij} - f_i), \quad i \neq j = 1,2 \quad (5)$$

В § 2 излагаются результаты поэтапной разработки эффективного численного метода статистического моделирования задач динамики РГ в переходном режиме, основанного на алгоритмах п. I.4. С этой целью был выделен ряд задач динамики РГ, относительно простых, но физически содержательных, позволивших последовательно разработать кинетические и вычислительные аспекты, связанные с созданием метода.

П. 2.I посвящен разработке общих вопросов численной реализации итерационного алгоритма для уравнения БГК на основе задач о течении Куэтта и одномерного переноса тепла в РГ. Рассматривались существенно неравновесные режимы в диапазоне Kn =0,2–÷2,0. Сравнение результатов по газодинамическим моментам с данными (Huang A.B., Hartley D.L.1968), (Власов В. И., 1970) позволило оценить достижимую точность в зависимости от параметров режима, разбиения расчетной области, числа итераций и констатировать практическую работоспособность алгоритма.

В п. 2.2 исследован вопрос о физической адекватности применения модельных кинетических уравнений (1), (3) к расчету сверхзвуковых течений РГ с ударным переходом, существенный для использования развиваемого метода в практике. Удачной вычислительной моделью здесь стала задача о структуре ударной волны, содержащая ряд характерных особенностей таких течений. Полученные систематические результаты для ряда распространенных в динамике РГ параметризаций $\vartheta([M]_\vartheta)$, $f_+([M]_+)$ сопоставлялись с экспериментальными данными по профилям плотности (Shmidt B., 1969) и расчетами распределения температур (Bird G. 1971) в ударной волне в диапазоне M =2,8–8. Сравнение показало удовлетворительную адекватность относительно простых параметризаций ϑ, f_+. Результаты проведенных здесь расчетов имеют и самостоятельный интерес для классической задачи динамики РГ.

П. 2.3 содержит результаты апробирования итерационного статистического алгоритма для системы (5) на задаче о структуре ударной волны в смеси $Ar - He$ различного парциального состава. Хорошая сопоставимость с экспериментальными данными (Hartnett L. Muntz P.,1972) и расчетами (Abe K., Oguchi H., 1969) по профилям газодинамических величин подтверждает работоспособность алгоритма в задачах аэродинамики смесей РГ, в частности, с сильно различающимися молекулярными массами.

Глава 2 "Моделирование задач аэродинамики разреженного газа при конечных числах Кнудсена" содержит анализ исследований тел простой формы в плоском и осесимметричном потоке РГ, иллюстрирующий возможности разработанного метода статистического моделирования применительно к задачам внешнего сверхзвукового обтекания в переходном режиме по числам Kn.

В § 1 рассматривается обтекание прямого кругового цилиндра в двумерной постановке. При относительной простоте эта задача содержит весь комплекс характерных черт внешнего сверхзвукового обтекания. На ней были исследованы особенности статистического моделирования таких задач и отработаны приемы снижения дисперсии статистических оценок газодинамических величин вблизи обтекаемого тела, на его поверхности и в следе за ним, где траектории модельных частиц имеют повышенную статистическую ценность. С этой целью были адаптированы известные в М-К приемы - существенной выборки и расщепления и рулетки траекторий.

Расчеты проводились во всем диапазоне переходного режима при Kn =0,025-I,5 и M =4,0; 5,5 для теплоизолированного цилиндра. Вычислялись поля плотности, скорости, температуры в области течения, а также интегральный коэффициент сопротивления C_x. Анализ распределений газодинамических величин при конечных числах Kn показывает их значительное отличие от случая континуального режима. Так, размеры возмущенной области здесь примерно одинаковы вдоль и поперек основного потока, а зона сжатия не повторяет известную структуру за отсоединенной ударной волной. Полученные значения коэффициента сопротивления хорошо коррелируют с экспериментальными данными (Maslach G., Shaaf S., I963), (Koppenwalner G.,I969) во всем диапазоне переходного режима. Сравнение с появившимися позднее расчетами (Лимар Е.Ф., I975), Крауфорд Д., Вогениц Ф., I976), выполненными на тех же режимах другими численными методами, показало удовлетворительную близость их расчетных результатов по локальным характеристикам течения, в частности, распределений газодинамических величин на линии торможения. Все это дало возможность сделать вывод, что разработанный метод позволяет получать физически адекватные результаты в реальных задачах аэродинамики РГ.

В § 2 изучены результаты расчетов аэродинамики затупленных тел, представляющих упрощенные модели спускаемых аппаратов (СА). Рассматривалось обтекание сферы и тела вращения, составленного конической обечайкой и торцевыми сферическими сегментами (СК-тело), осесимметричным потоком РГ. Исследовалось поведение полей газодинамических величин и коэффициентов лобового сопротивления C_x в диапазоне $Kn = 2\cdot10^{-2}-10^{1}$ для сверх- и гиперзвукового режима и аппаратов с холодной, промежуточной и адиабатической поверхностью. Для локальных характеристик в поле течения, точность вычисления которых для расчетной области в целом была невысока, использовались простейшие приемы сглаживания и выделения изолиний. Тем не менее полученные распределения оказались вполне информативными, в частности, при относительном сравнении структуры зон сжатия или разворота потока в окрестности максимального сечения у СК-тела и сферы с одинаковым миделем, но разным радиусом лобового затупления. Существенно выше была точность моделирования газодинамических величин в окрестности линии торможения, где отчетливо прослеживается влияние геометрических и режимных факторов на их распределение, а для сферы установлено удовлетворительное количественное соответствие с экспериментом (Wainwright J., 1968) и расчетами по модели Навье-Стокса (Тарнавский Г. А., 1983). Расчетные данные по C_x сферы в отдельных режимах хорошо коррелировали с экспериментом (Phillips W., Kuhltau A., 1971) и расчетами (Ларина И. Н., 1969). Было отмечено относительно слабое влияние на C_x затупленных тел температурного фактора, что в дальнейшем подтвердилось в других расчетах (Ларина И. Н., Рыков В. А., 1985), но справедливо лишь при осесимметричном обтекании (Горелов С. Л., Ерофеев А. И., 1985). Результаты расчетов могут быть полезны для приближенной оценки условий обтекания внешних устройств и баллистики СА данных конфигураций.

В <u>§ 3</u> рассмотрены некоторые данные расчетов обтекания плоского тонкого клина, позволивших получить определенное представление об аэродинамике объемной несущей поверхности во всем диапазоне переходного режима, что представляло интерес для эскизных разработок космических аппаратов многоразового использования. В частности, было показано, что, несмотря на различное поведение интегральных аэродинамических характеристик в зависимости от Kn для малых (полет в атмосфере) и больших (режим посадки) углов атаки, относительное аэродинамическое качество K_α клина ведет одинаково монотонно в обоих случаях, убывая с возрастанием числа Kn . Это позволяет оценивать нижнее значение K_α крыла (интегрированного корпуса) во всем диапазоне высот полета по его величине в свободномолекулярном режиме, которое можно получить достаточно просто.

<u>В главе 3 "Исследование инвариантных решений нелинейного уравнения Больцмана и его моделей</u>" собран ряд аналитических результатов для кинетических моделей релаксации, связанных с уравнением Больцмана, которые были получены в рамках проблемы расчета эволюции надтепловых "хвостов" ФР.

В § I исследованы некоторые математические свойства моделей столкновительной релаксации в атомарном газе. В п. I.I изучена структура Фурье-представления интегралов столкновений для нелинейного и линеаризованного (линейного) уравнений Больцмана со степенным потенциалом взаимодействия молекул $U \sim r^{-(\nu-1)}$, в том числе с учетом возможных симметрий ФР. Показано, что для всех $3 < \nu < \infty$ и твердых сфер, кроме ν =5 и псевдомаксвелловских молекул, Фурье-преобразование рассмотренных столкновительных интегралов не приводит к снижению размерности операторов, действующих в пространстве обобщенных Фурье-образов (характеристических функций) ФР.

В п. I.2 сформулированы следствия, связанные с заменой точного больцмановского интеграла столкновений приближенным асимптотическим выражением при $|\vec{V}| \to \infty$. Соответствующему кинетическому уравнению придается смысл приближенной промежуточной по времени и энергии асимптотики уравнения Больцмана (Krook M., Wu T., 1976), (Макашев Н. К., 198I). Ряд свойств этого уравнения определяется близостью структуры приближенного интеграла столкновений к известному Фурье-представлению точного интеграла для (псевдо) максвелловских молекул (Бобылев А. В., 1975). Для ФР, зависящих от энергетической переменной (изотропных по скорости), уравнение имеет вид

$$x^{\alpha}\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \int_0^1 ds\,\rho(s)\left[F(sx,t)F((1-s)x,t) - \theta(F)F(x,t)\right], \quad (6)$$

где $F(x,t)$ – приведенная (отнесенная к равновесной) ФР, $\alpha = 1/2\,(5-\nu)/(\nu-1)$. При $\alpha = -1$ (6) соответствует приближенной асимптотике для двумерного газа со "сверхтвердым" взаимодействием (СТВ). Для (6) отмечены неотрицательность решений релаксационной задачи по положительным начальным данным и необходимость их коррекции для получения физически адекватной эволюции ФР, вид спектра и собственных функций для соответствующего (6) линеаризованного уравнения, выражение общего решения (6) при $\alpha = -1$ (СТВ) в терминах преобразования Лапласа $\tilde{F}(z,t)$ и другие.

П. I.3 содержит некоторые результаты для известного кинетического уравнения (Кас М., 1956) с одномерным скоростным пространством, дополняющие возможности его использования как математической модели точного уравнения Больцмана в теоретикогрупповом анализе, исследовании инвариантных решений, при разработке и тестировании численных методов. В частности, получено множество точных решений, выражающихся в замкнутой форме

$$f_{(2n+1)}(v,t)=\frac{1}{2\pi}e^{-v^2/2}\left[1+a_1\frac{(-1)^{2n+1}e^{\lambda_{2n+1}t}}{(2n+1)!\,(2)^{(2n+1)/2}}H\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

где λ_{2n+1} - собственное значение линеаризованного оператора столкновений для этой модели, $H_n(x)$ - полином Эрмита степени n. Хотя найденные ФР не являются положительно определенными, они дают содержательный материал для тестирования численных методов, предназначенных для вычисления ФР на больших энергетических интервалах. Работа [I0], содержащая результаты этого пункта появилась несколькими годами раньше близких работ на Западе, отмеченных в известном обзоре (Ernst M.H.,1980)

§ 2 посвящен исследованию групповых свойств кинетического уравнения (6). Несмотря на простоту, оно сохраняет характерные черты точного уравнения Больцмана, в частности, нелокальный интеграл столкновений, что до последнего времени затрудняло приложение общей схемы теоретико-группового анализа (Овсянников Л. В., 1978) к кинетическим уравнениям такого типа. В п. 2.I изложены результаты эвристического подхода к анализу групповых свойств (6). Использовался переход к уравнению для образа Лапласа $\tilde{F}(z,t)$, которое в терминах дробных производных Вейля (Брычков Ю. А., Прудников А. П., 1977) имеет вид

$$W_z^{1+\alpha}\frac{\partial\tilde{F}}{\partial t}+W_z^1\tilde{F}=\tilde{F}^2$$

При целых α =0,I,... последнее сводится к дифференциальному уравнению в частных производных, групповые свойства которого анализируются обычными средствами. На этом пути была найдена функциональная структура инвариантных преобразований, допускаемых уравнением (6), образованная ими четырехпараметрическая группа Ли G^4, вид соответствующих инвариантных решений и уравнения, которым последние удовлетворяют.

В п. 2.2 дана схема вывода определяющего уравнения для наиболее широкой группы Ли преобразований, допускаемой некоторым операторным уравнением

$$\Phi(\bar{u})=0. \tag{7}$$

Для однопараметрической подгруппы G_a^1 оно имеет вид

$$\left.\frac{d\phi(\bar{u}')}{da}\right|_{a=0}=0\,, \quad \bar{u}'=T_a\bar{u}\,. \tag{8}$$

Здесь $\bar{u}$ - общий вектор всех переменных в (7), T_a - преобразование из G_a^1 , a - групповой параметр. При этом (8) рассматривается на решениях (7). Такой подход позволяет исключить нахождение суперпозиции инфинитезимального оператора продолженной группы с уравнением (7), что в данном случае потребовало бы вычисления функциональных производных от нелокальных операторов. В (8) это заменено простым дифференцированием по групповому параметру.

В рамках данной схемы для уравнения (6) было построено определяющее уравнение типа (8), из решения которого найдена наиболее широкая группа Ли, допускаемая (6). Она однозначно определяется базисными операторами

$$X_1=\partial_t\,,\quad X_2=x F\partial_F\,,\quad X_3=\alpha F\partial_F+x\partial_x\,,\quad X_4=F\partial_F-t\partial_t$$

и совпадает с эвристически построенной в п. 2.I группой G^4. Это позволяет утверждать, что G^4 определяет полное множество инвариантных решений (6). В случае α =0 этот результат относится к точному уравнению Больцмана с (псевдо) максвелловскими молекулами, Фурье-представление которого совпадает с (6).

В § 3 исследованы некоторые классы инвариантных решений (6). В частности, в п. 3.I рассмотрен класс вида

$$F=e^{-c_1x}f(y)\,,\quad y=x(\alpha t c)^{1/\alpha}\,,\quad X=c_1X_2+X_3-\alpha X_4\,, \tag{9}$$

где X - инфинитезимальный оператор соответствующей подгруппы из G^4. При α =0 $y=xe^{ct}$, а в X вместо последнего слагаемого стоит $-c^{-1}X_1$. Изучался вопрос о существовании замкнутых инвариантных решений в форме

$$f(y)=e^{-y}\left(1+\sum_{n=n_0}^{N}a_n/\Gamma(p(n)+1)\,y^{p(n)}\right),\quad N<\infty\,, \tag{I0}$$

$\{p(n)\}_{n=n_0}^{N}$ - некоторое конечное множество вещественных чисел. Подстановка (I0) в (6) приводит к переопределенным системам нелинейных алгебраических уравнений, исследование совместности которых для всех $2<\nu<\infty$ показало, что решения вида (I0) имеют место лишь при α =0; I. В п. 3.2 показано, что известные для α =0; I альтернативные способы построения замкнутых решений вида (9) (Ernst M. H., 1981) в общем случае α не приводят к положительному результату.

В п. 3.3 выписаны стационарные масштабно-инвариантные решения уравнения (6) с постоянными потоками по фазовому пространству, аналогичные степенным "распадным" спектрам в слабой волновой турбулентности (Захаров В. Е., 1965) они имеют вид

$$F_0(x) = A_0 x^{\left(\frac{1}{\nu-1}-1\right)}, \qquad F_1(x) = A_1 x^{\left(\frac{1}{\nu-1}-3/2\right)}$$

для постоянного потока частиц и энергии соответственно. Показатели степени были найдены из размерностных оценок. Сток частиц может моделировать, например, пороговую реакцию, а случай постоянного потока энергии - процесс "охлаждения" горячих атомов.

Глава 4 "Вычислительные модели поступательной релаксации в газе при надтепловых энергиях" посвящена численным исследованиям релаксации в простом газе.

В § I излагается спектральный алгоритм прямого численного интегрирования однородного уравнения Больцмана (этапа столкновительной релаксации в схеме расщепления по физическим процессам) для (псевдо) максвелловской модели взаимодействия молекул. Алгоритм использует Фурье-представление задачи однородной релаксации (Бобылев А. В., 1975)

$$\frac{\partial \hat{f}(\bar{k},t)}{\partial t} = \hat{J}(\hat{f},\hat{f}), \qquad \hat{f}(\bar{k},0) = \Phi(\bar{k}), \tag{II}$$

$$\hat{J}(\hat{f},\hat{f}) = \int d\bar{n}\, g(\cos\theta)\left[\hat{f}\left(\frac{\bar{k}+|\bar{k}|\bar{n}}{2},t\right)\hat{f}\left(\frac{\bar{k}-|\bar{k}|\bar{n}}{2},t\right) - f(\bar{k},t)f(k,0)\right],$$

где $\hat{J}$ содержит только интегрирование по параметрам соударения. Сокращение кратности интегрирования в сочетании с численной процедурой быстрого преобразования Фурье позволяет существенно снизить объем вычислительной работы на каждом временном шаге по сравнению с использованием обычных численных квадратур для исходной задачи. Если $N = 2^m$ - число узлов регулярной сетки в пространстве скоростей (волновых векторов), N_e - количество операций для вычисления квадратуры по углам рассеяния, то относительное сокращение числа операций оценивается как

$$NN_e/(N_e + 2\log_2 N) \Longrightarrow O(N),$$

причем оценка сохраняется для линеаризованного (линейного) интеграла столкновений, а также во всех случаях, когда кратность интегралов снижается из-за симметрии ФР в пространстве скоростей. Предлагаемый алгоритм консервативен в отношении интеграла массы, снижает накопление ошибок округления, позволяет представлять ФР интерполяционными тригонометрическими формулами. Как следует из результатов п. 3.I.I, в общем случае степенных потенциалов отталкивания представления (II) не дает выигрыша в числе операций.

Вычислительные возможности алгоритма предварительно исследовались на релаксационной модели с одномерным скоростным пространством (Кас М., 1956) с привлечением результатов п. 3.I.3. В частности, рассматривались способы обеспечения точности при интегрировании на больших скоростных и временных интервалах. Было показано, что коррекция ФР на основе законов сохранения (Аристов В. В., Черемисин Ф. Г., 1980) может внести существенную погрешность в надтепловые "хвосты".

В § 2 приводятся результаты численного исследования задач изотропной релаксации на основе предложенного спектрального алгоритма. Серия методических расчетов позволила создать комплекс программ, обеспечивающий достаточную точность в интервале скоростей молекул $0 \leq v \leq 10\, c_T$ и на временах $0 \leq t \leq 20\, \tau_\lambda$. ($c_T$, τ_λ - средние тепловая скорость и время между соударениями молекул), где ФР может меняться в пределах 10-12 порядков. На его основе рассчитывалась эволюция ряда характерных распределений с экспоненциальной и степенной асимптотикой "хвостов". Дополнительно изучались поведение моментов ФР вплоть до высокого порядка, сравнительный темп максвеллизации отдельных заселенностей (неоднородность релаксации по спектру), время достижения режима линейной одномодовой релаксации. В совокупности эти результаты, полученные прямым численным интегрированием уравнения Больцмана, существенно дополняют известные представления элементарной кинетики и асимптотической теории.

В § 3 разработанный комплекс программ используется для численного анализа процесса немонотонной максвеллизации надтепловых "хвостов" ФР. Были проведены параметрические расчеты для нескольких семейств распределений с первоначально пониженной заселенностью "хвостов" в диапазоне изменения параметров, обеспечивающем существование эффекта. Рассматривались гладкие начальные данные с экспоненциальной и степенной асимптотикой по энергии, а также семейство, получаемое наложением узкополосного (сингулярного) распределения на равновесную ФР

$$f^{(0)}(v) = \rho_1 (2\pi T_1)^{-3/2} exp(-v^2/(2T_1)) + \rho_2 \delta(v-a).$$

Последнее представляет интерес с точки зрения практической реализации эффекта. Как показывают результаты расчетов, изучаемый процесс имеет ряд характерных черт, общих для всех рассмотренных семейств начальных данных. В частности, возникающая динамическая перезаселенность развивается как волна переменной амплитуды с крутым передним и пологим задним фронтом, распространяющаяся в сторону больших энергий. В условиях развитого эффекта амплитуда перезаселенности в диапазоне $3 < v/c_T <$ 10 в среднем в 2–3 раза превышает равновесное значение, причем время жизни возмущения ФР при данной энергии составляет (5–6)τ_λ, а полное время релаксации волны перезаселенности в расчетной области спектра достигает $20\tau_\lambda$. Это показывает возможность использования эффекта для интенсификации барьерных кинетических процессов, идущих на фоне поступательной релаксации. Для количественной оценки выполнялись расчеты скорости модельной пороговой реакции в предположении, что она не меняет картину релаксации ФР. Для простых барьеров, задаваемых функцией Хевисайда, при $v \leq 5\,c_T$ было показано, что средние скорости реакции могут более чем вдвое превышать равновесные значения. Результаты (Turchetti G., Paolilly M., 1982) позволили распространить эту оценку на весь спектр степенных потенциалов отталкивания вплоть до модели твердых сфер. При наличии подкачки энергии эффекту можно придать стационарный характер, получив возможность управлять пороговыми процессами с помощью специально формируемых "хвостов" ФР.

В <u>§ 4</u> на основе задачи изотропной релаксации с использованием результатов п. 3.1.2 проведено сопоставление решений уравнения (6) и точного уравнения Больцмана. Для псевдомаксвелловской и СТВ моделей, отвечающих нижней и верхней границам по жесткости взаимодействия в газах, оценены интервалы энергий и времени, на которых уравнение (6) удовлетворительно воспроизводит монотонную эволюцию надтепловых "хвостов", описываемых точным уравнением Больцмана. Из результатов следует, что уравнение с приближенным интегралом столкновений может быть использовано для построения упрощенной модели кинетики при надтепловых энергиях, физически содержательной и эффективной в смысле численной реализации.

В <u>главе 5 "Моделирование турбулентности статистическими ансамблями вихрей с невязким взаимодействием</u>" рассматриваются некоторые приложения статистических ансамблей точечных (дискретных) вихрей в идеальной жидкости к моделированию турбулентности в плоском и трехмерном случаях.

В <u>§ I</u> описаны системы точечных вихрей с гамильтоновой динамикой, используемые в дальнейшем изложении. В п. <u>I.I</u> введена регуляризованная модель точечных вихрей для моделирования эффектов, связанных с пространственными течениями завихренной жидкости, Модель описывается в динамических переменных "радиусы - векторы - импульсы Лэмба" $\{\bar{r}_i, \bar{p}_i\}_{i=1}^{N}$, канонически сопряженных относительно гамильтониана с дипольным взаимодействием

$$H_N = \sum_{i=1}^{N} T(|\bar{p}_i|) + \varepsilon \sum_{i<j}^{N} \Phi_{ij} \ , \quad \Phi_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{(\bar{p}_i,\bar{p}_j)}{r_{ij}^3} - \frac{(\bar{p}_i,\bar{r}_{ij})(\bar{p}_j,\bar{r}_{ij})}{r_{ij}^5}\right] \quad (I2)$$

Для параметризации зависимости собственной энергии вихря от его импульса Лэмба была выбрана степенная функция $T(|\bar{p}|)=Ap^{1/k}, k\in[5/7, 2]$, соответствующая однопараметрическому семейству вихревых колец, распространяющихся в идеальной жидкости без изменения формы (Norbury J., 1973). Как следует из (I2), динамическая система сохраняет все общие интегралы движения завихренности в идеальной жидкости. При этом интеграл спиральности, характеризующий топологию зацепления вихревых контуров, здесь равен нулю. Из эволюции величины $\sum_{i=1}^{N} p_i^2$ не являющейся инвариантом движения, можно заключить, что система содержит существенно трехмерный эффект растяжения вихревых нитей. Все это определяет перспективность введенной системы для исследования трехмерных эффектов развитой турбулентности как на базе различных методов статистической механики, так и прямым численным моделированием.

В п. I.2 кратко аннотированы основные свойства двух динамических систем точечных вихрей в плоском случае, гамильтонианы которых имеют вид

$$H_N = -(2\pi)^{-1}\Gamma^2 \sum_{i<j}^{N} \psi(r_{ij}) \quad (I3)$$

где $\psi(\bar{r})$ – фундаментальное решение уравнения для функции тока обычной или потенциальной завихренности.

В § 2 рассматриваются вопросы, связанные с использованием динамических систем для численного моделирования турбулентности. В п. 2.I показано, что моделирование энергетических спектров $E(\kappa)$ изотропной турбулентности в области больших волновых чисел статистическим осреднением на траектории динамической системы вихрей как в плоском (I3) (Новиков Е. А., 1975), так и в трехмерном случае (I2) приводит к неверному результату в главном члене асимптотики. Для адекватного моделирования необходим переход к дискретным вихрям с определенной внутренней структурой. Для плоского случая это приводит к выражению $E(\kappa)\sim|\hat{\omega}_o(\kappa)|^2/\kappa$, где $\hat{\omega}_o(\kappa)$ – Фурье-спектр пространственного распределения завихренности в отдельном вихре, подбором которого можно получить правильное выражение для моделирования спектра. Например, спектр $E(\kappa)\sim\kappa^{-3}$, связанный с каскадом энстрофии, можно моделировать круглыми вихрями с $\omega_o(r)\sim 1/r$. С этих позиций приемлемые результаты (Aref H., Siggia E., 1981), полученные для $E(\kappa)$ на сигулярных вихрях, объясняются специфическими "размазывающими" свойствами использованного алгоритма "вихри в ячейках" (VIC) на плоскости.

В п. 2.2 вводится алгоритм типа VIC в трехмерном случае, в котором лагранжевы частицы представляются вихрями, описываемыми в терминах $\{\bar{P}_i, \bar{r}_i\}_{i=1}^{N}$. В качестве исходного используется разложение поля скорости (Веретенцев А.Н., Кузьмин Г.А., 1982) в несжимаемой жидкости в виде

$$\bar{u} = \bar{I} + \bar{\nabla}\varphi, \qquad (I4)$$

где $\bar{I}$ – плотность импульса Лэмба. При переходе на дискретный уровень соотношение (I4) позволяет восстановить поле скорости в узлах сетки по известному массиву $\{\bar{I}_n\}$. При этом потенциальная составляющая вычисляется с использованием эффективной численной процедуры быстрого преобразования Фурье. Для пересчета поля плотности импульса на эйлерову сетку и обратной интерполяции поля скорости в координаты нахождения вихревых частиц используется представление вихрей объемами в виде элементарных сеточных ячеек с равномерно распределенной плотностью импульса. Последнее аналогично простейшему приему для плоского случая (Leonard A., 1980). Эволюция вихревых частиц описывается динамической системой вида

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{u}_i \ ; \qquad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}_i}(\bar{p}_i \bar{u}_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

Предложенный алгоритм существенно экономичнее по сравнению с прямым численным моделированием динамической системы с гамильтонианом (I2), а также с попытками обобщить метод VIC на трехмерный случай (Leonard A., 1980), в которых прослеживается динамика маркеров на вихревых нитях, взаимодействующих по закону Био–Савара.

В § 3 изложены некоторые результаты применения метода кинетического уравнения к неравновесным статистическим ансамблям точечных вихрей. В п. 3.2 рассматривается кинетическое уравнение для модели точечных вихрей (I2) с интегралом столкновений в форме Ландау, где ФР придается смысл распределения мелкомасштабных турбулентных пульсаций по вихревым импульсам и координатам. Уравнение может быть использовано для вывода эволюционных уравнений любых одноточечных пульсационных характеристик. В качестве примера выведена замкнутая IO-магнитная система, описывающая эволюцию пульсационных величин вплоть до компонент тензора напряжений Рейнольдса. Показано также, что в рамках данной модели можно получить каскад Колмогорова, соответствующий закону „$-5/3$", который реализуется на растяжении вихрей. В предположении однородности гамильтониана (I2) относительно растяжения пространства импульсов на основе результата (Кац А. В. и др., 1976) для кинетического уравнения с 4-х волновым взаимодействием выписывается точное решение вида $f(|\bar{p}|) = A|\bar{p}|^s$, $s = 1/6\,(19 + 4/\kappa)$ с постоянным потоком энергии, которое при κ =IO/II из интервала (5/7, 2) дает колмогоровский каскад.

П. 3.2 содержит вывод кинетического уравнения для прямолинейных вихревых нитей с гамильтонианом (I3). Исходным является уравнение Лиувилля для N-вихревого статистического ансамбля F_N. Для анализа и суммирования рядов теории возмущений, представляющих его формальное решение, используется специально адаптированный вариант диаграммной техники Пригожина-Балеску. Подавление расходимостей на больших временах достигалось с помощью процедуры двойной перенормировки. Получено замкнутое эволюционное уравнение вида

$$\frac{\partial F(\bar{r},t)}{\partial t} + \bar{U}(F)\frac{\partial F(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}} = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(F)\frac{\partial^2 F(\bar{r},t)}{\partial x_i \partial x_j} + B(F) , \qquad (15)$$

соответствующее приближению Ленарда-Балеску в кинетической теории плазмы. С точностью до нормировки ФР $F(\bar{r},t)$ имеет смысл локальной завихренности, осредненной по ансамблю F_N. Слева в (15) стоит конвективный оператор Гельмгольца, описывающий самосогласованный перенос плоской завихренности в идеальной жидкости, а справа - квазилинейный эллиптический оператор с нелокальными коэффициентами. Его матрица диссипативных коэффициентов может менять знак на решении и уравнение (15) в явном виде учитывает физический эффект знакопеременной вихревой вязкости. Показано, что при отсутствии внутренних границ глобальная эволюция решения идет с возрастанием функционала информационной (больцмановской) энтропии и распределение завихренности стремится к стационарному. Переход к условным распределениям позволяет использовать уравнение (16) для исследования динамики двумерной завихренности в когерентных структурах.

Глава 6 "Вариационная модель организованной завихренности в плоских турбулентных течениях" посвящена исследованию организованных (когерентных) вихревых структур (КС) на основе статистического вариационного принципа.

В § 1 дается эвристическое обоснование применения принципа максимума информационной энтропии к исследованию структуры КС в плоских турбулентных потоках и результаты его апробирования на простых задачах. В п. 1.1 анализируется поведение энтропийного функционала

$$S(\omega) = \int d\bar{r}\, |\omega(\bar{r})| \,\ln |\omega(\bar{r})| , \qquad (16)$$

вычисляемого на когерентной компоненте поля завихренности для некоторых имитационных моделей КС и показано его неубывание в процессе эволюции. П. 1.2 содержит формулировку вариационного принципа для функционала (16) применительно к задаче о распределении завихренности в плоских КС. Требуется найти экстремум (максимум) функционала

$$\Phi(\omega) = S(\omega) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_i(\omega), \quad \varphi_i(\omega) = \mu_i \qquad (17)$$

где $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ – некоторый набор функционалов от неизвестного поля $\omega(\vec{r})$, вообще говоря, нелинейных, значения μ_i которых считаются заданными. В набор функционалов может быть включена различная информация о свойствах КС и внешнего осредненного потока – динамические инварианты, моментные характеристики, особенности симметрии. Это расширяет возможности данного подхода по сравнению с моделированием КС равновесными статистическими ансамблями (точечных) вихрей (Lundgren T., Pointin Y., 1977), (Kida S., 1975), (Кузьмин Г. А., 1982).

В п. 1.3, имеющем методический характер, содержится пример применения вариационного принципа к уединенным вращательно изотропным геострофическим вихрям. При условиях, соответствующих сохранению невязких интегралов завихренности из экстремума (17) получено функциональное уравнение для потенциальной завихренности. Найдены его отдельные точные решения, апробирован итерационный численный алгоритм и построены численные решения в некотором диапазоне параметров. Полученные решения могут использоваться для моделей КС в геострофических течениях.

В п. 1.4 показано, что обычные и геострофические уединенные вихри, получаемые из вариационного принципа для (17) при сохранении невязких интегралов динамики завихренности, нейтрально устойчивы в отношении двумерных невязких возмущений. Это позволяет предположить, что модельные структуры, получаемые из вариационного принципа будут воспроизводить наблюдаемую в экспериментах устойчивость КС к невязким возмущениям.

В § 2 представлены результаты моделирования организованных вихревых структур в свободных сдвиговых потоков с использованием статистического вариационного принципа. В п. 2.1 в качестве простой модели, имитирующей процесс попарных слияний в системе КС, идущий с неубыванием информационной энтропии в смысле (16), рассмотрено вращающееся МГД-течение типа Ленерта. Отдельные структуры моделировались круглыми недеформируемыми вихрями с невязким взаимодействием, динамика которых определялась законами сохранения завихренности, момента количества движения и энергии. На основе законов сохранения получено следующее автомодельное соотношение

$$\lambda \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{N+1} = 2\pi \exp(-4\pi\varepsilon), \qquad (18)$$

где $\lambda = 2\pi r_0 /(N\delta)$ – безразмерная длина волны неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, развитие которой привело к стационарному состоянию с N вихрями на окружности радиуса r_1, $\delta \sim 1/\sqrt{B}$ – толщина сдвигового слоя до потери устойчивости. Используя (I8), можно оценить заключенную в КС долю крупномасштабных пульсаций, коэффициент перемежаемости, число КС в зависимости от величины магнитного поля B. В частности, на основе упрощенной модели течения в отдельном вихре было показано, что безразмерная энергия КС $\mathcal{E}$ в (I8) не зависит от параметров режима. Откуда следует простое автомодельное соотношение для числа КС $N/\sqrt{B}=const$, которое хорошо описывает экспериментальные данные (Клюкин А.А., Колесников Ю. Б., 1980).

В п. 2.2 рассматриваются более реалистичные модели свободных сдвиговых слоев с КС, для которых тем не менее удается получить отдельные аналитические результаты. При этом в варьируемый функционал (I7), кроме условий на невязкие инварианты вихрей, включаются особенности симметрии течения с учетом коллективного взаимодействия КС. В такой постановке рассмотрены задачи о прямолинейном и вращающемся кольцевом сдвиговых слоях. Показано, что в этих случаях уравнение Эйлера для функционала (I7) сводится к нелинейному эллиптическому уравнению типа Лиувилля для функции тока ψ вихревой структуры

$$\Delta\psi = -C\exp(-4\pi\lambda\psi - \mu r^2), \qquad (I9)$$

где λ характеризует дисперсию завихренности в КС, а μ связано с частотой вращения кольцевого слоя. Для прямолинейного слоя сдвига при $\mu = 0$, $\lambda = -2$ и определенного выбора С (I9) дает однопараметрическое семейство периодических вихрей Стюарта (Stuart J., 1967). Показано, что оно позволяет построить имитационную модель, воспроизводящую сценарий попарных слияний, идущих с возрастанием функционала (I6), и при определенном выборе параметра семейства удовлетворительно приближающую эксперименты (Browand F., Weidman P., 1976) по среднему профилю, распределению завихренности в КС, коэффициенту перемежаемости. Для кольцевого сдвигового течения с точечным вихрем в центре, характерного для геострофических приложений при $\mu = 0$, $\lambda = -8$ (стационарное состояние) получено точное решение

$$\psi(r) = -\frac{1}{4\pi}\left\{\ln\left[(r/\ell)^N + (\ell/r)^N - 2\alpha\cos N\varphi\right] + \ln(r\ell)\right\}, \quad 0 \le \alpha \le 1$$

обобщающее решение Стюарта на этот случай кольцевого течения. Более высокая степень симметрии течения позволяет в этом случае добиться удовлетворительного моделирования и пульсационных характеристик кольцевых течений (Rabaud M., Couder Y., 1983).

В качестве примера обобщения вариационного принципа для энтропийного функционала (I6) на течения с кольцевыми вихревыми трубками в невязком приближении рассмотрена система вихревых торов, периодическая вдоль оси симметрии, моделирующая КС на границе круглой струи. Выведено уравнение для функции тока в отдельной КС, учитывающее их коллективное взаимодействие и периодичность, определен физический смысл параметров семейства его решений.

В заключение сформулированы

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

I. Осуществлено строгое построение итерационных статистических алгоритмов для кинетического уравнения Больцмана и класса модельных кинетических уравнений теории газов. Создан методологический подход к анализу подобных статистических алгоритмов и положено начало классификации методов М-К в динамике разреженного газа.

2. На основе предложенной схемы и кинетических уравнений типа БГК разработан экономичный метод статистического моделирования задач аэродинамики однокомпонентного РГ и смесей, который не требует вычисления и хранения многомерных массивов значений ФР, ограничиваясь переработкой информации на уровне гидродинамических моментов. Это позволило получить систематические результаты по интегральным и локальным аэродинамическим характеристикам и структуре полей гидродинамических величин при плоском и осесимметричном сверхзвуковом обтекании тел простой аэродинамической формы, перекрывающих весь диапазон переходного режима. Хорошая сопоставимость этих результатов с экспериментальными данными и расчетами на основе уравнения Больцмана в совокупности с аналогичными результатами других авторов показывает, что статистические модельные уравнения дают адекватные результаты для задач аэродинамики РГ в переходном режиме.

3. Изучены некоторые математические свойства ряда моделей

столкновительной релаксации. Предложен способ вывода определяющих уравнений для наиболее широкой группы Ли преобразований, допускаемых интегро-дифференциальными уравнениями типа Больцмана, позволяющий исключить формальные трудности применения общей схемы группового анализа к уравнениям с нелокальными операторами. На этой основе проведен полный теоретико-групповой анализ кинетического уравнения с приближенным интегралом столкновений, имеющего смысл промежуточной асимптотики для надтепловых энергий в задаче изотропной релаксации. В частности, на основе решения полученного определяющего уравнения вычислены инфинитезимальные координаты его наиболее широкой группы Ли и найден полный набор ее инвариантов.

4. Исследованы классы инвариантных БКВ-решений для кинетического уравнения с одномерным скоростным пространством, а также для кинетического уравнения с приближенным асимптотическим интегралом столкновений при потенциале отталкивания с произвольным рациональным показателем степени. Для последнего уравнения рассмотрены также масштабно-инвариантные решения с постоянными потоками по фазовому пространству.

5. Предложен и программно реализован эффективный спектральный алгоритм прямого численного интегрирования задачи однородной столкновительной релаксации (этапа столкновительной релаксации в схеме расщепления по физическим процессам) для уравнения Больцмана с нелинейным (линеаризованным, линейным) интегралом столкновений и (псевдо) максвелловской моделью взаимодействия. Метод использует процедуру быстрого преобразования Фурье и позволяет сократить в $O(N)$ раз (N - число узлов сетки в скоростном пространстве) объем вычислений по сравнению с использованием обычных квадратур, давая возможность решать кинетические задачи, требующие точного вычисления ФР на больших интервалах по энергии и времени.

6. На основе единого численного подхода, включающего спектральный и моментный методы, изучены особенности релаксации ряда характерных начальных распределений с экспоненциальной и степенной асимптотикой по скорости в диапазоне до 10 тепловых энергий и вплоть до выхода на одномодовый линейный режим. Проведено систематическое исследование немонотонной максвеллизации для различных семейств начальных данных, позволяющих получить этот эффект. В зависимости от параметров семейств получены

количественные оценки характерных амплитуд, времени жизни и влияния на скорость кинетических пороговых процессов возникающих динамических перезаселенностей.

7. Проведено сопоставление численных и аналитических решений кинетического уравнения с асимптотическим интегралом столкновений и точного уравнения Больцмана. Для псевдомаксвелловской и СТВ-модели, предельных по жесткости взаимодействия, оценены интегралы энергий и времени, где это уравнение адекватно воспроизводит решение задачи об изотропной релаксации газа. Результаты показывают возможность использования данного уравнения для создания экономичного метода расчета поступательной релаксации в надтепловой области.

8. Введена регуляризованная модель точечных вихрей с невязким взаимодействием и гамильтоновой динамикой, сохраняющая эффект растяжения вихревых нитей и общие интегралы движения трехмерной завихренности. Для статистического ансамбля таких вихрей в приближении слабого взаимодействия рассмотрено кинетическое уравнение, пригодное для описания мелкомасштабной турбулентности. На примере его масштабно-инвариантного решения, отвечающего спектру Колмогорова, показано, что для адекватного моделирования механизмов турбулентности необходимо использовать вихри с определенной внутренней структурой. Для численного моделирования течений при больших числах Рейнольдса и эффектов подсеточной турбулентности на базе модели разработан эффективный алгоритм типа "вихри в ячейках" для трехмерного случая.

9. Для статистического ансамбля прямолинейных вихревых нитей в идеальной жидкости адаптирована диаграммная техника Пригожина-Балеску, на основе которой выведено замкнутое кинетическое уравнение для ФР завихренности в плоском случае, содержащее в явном виде эффект знакопеременной диссипации, на решениях которого функционал информационной энтропии в широком смысле возрастает. Уравнение может быть использовано для моделирования распределения завихренности в двумерных когерентных структурах.

10. Для построения квазистационарных моделей двумерных КС предложено и обосновано на примерах использование принципа максимума функционала информационной энтропии, вычисляемого на когерентной компоненте поля турбулентной завихренности. В набор дополнительных условий, при которых вычисляется экстремум, мо-

гут быть включены произвольные моментные характеристики поля завихренности, свойства симметрии КС, экспериментальная информация, что позволяет получать модели с возрастающей степенью адекватности.

II. С использованием вариационного принципа в невязком приближении выведены уравнения для модельных распределений в уединенных потенциальных вихрях, а также в периодических КС для свободных прямолинейных плоского и цилиндрического сдвиговых слоев и азимутально вращающегося кольцевого течения сдвига, которые сводятся к эллиптическим уравнениям с нелинейной правой частью. Получены их численные и аналитические решения, в частности, семейство вихрей Стюарта и его обобщение на случай кольцевого сдвига. Показано, что по некоторым параметрам предлагаемые простые модели дают удовлетворительное совпадение с экспериментом.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

I. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С., Харитонова Н.И. К вопросу о решении нелинейных кинетических уравнений динамики разреженного газа методом Монте-Карло // Численные методы механики сплошной среды / Новосибирск, I97I. - Т. 2, № 4. - С.IOI-IO7.
2. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С., Харитонова Н.И. Решение задачи о течении Куэтта для кинетического уравнения БГК методом Монте-Карло // Вероятностные методы решения задач математической физики. - Новосибирск, I97I. - С. 69-87.
3. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С. Исследование применимости некоторых статистических моделей в задаче о структуре ударной волны // Изв. СО АН СССР. Серия техн. наук. - I972. - Т. I3. - Вып. 3. - С. 33-38.
4. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С. Расчет обтекания цилиндра потоком разреженного газа в переходном режиме // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, I974. - Т. 5, № I. - С. I52-I56.
5. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С. К решению задач аэродинамики разреженного газа методом Монте-Карло // Прикладная аэродинамика космических аппаратов. - Киев. Наукова думка. I977. - С. 27-32.

6. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С. Метод Монте-Карло и структура ударной волны для бинарной смеси газов // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, I977. – Т. 8, № 6. – С. 30–37.
7. Yanenko N.N., Grigoriev Yu.N., Ivanov M.S. Numerical simulation of the rarefied gas dynamics//Lect. Notes in Physics.-141, Berlin.-Heidelberg-New York-Tokyo, Spr.-Verlag, 1981.-P.454-460.
8. Yanenko N.N., Grigoriev Yu.N., Ivanov M.S., Malykhin S.M. Mikhalitsyn A.N. Methods of statistical modelling and direct numerical integration of kinetic equations of gas theory. Development and application to problems of rarefied gas dynamics//Proc. 13th Intern. Symp. on RGD, Ed. O.M. Belotserkovsky, M.N. Cogan, S.S. Kutateladze, A.K. Rebrov.-V. 1.-New York-London: Plenum Press, 1985.-P.371-382.
9. Григорьев Ю.Н., Михалицын А.Н. Спектральный метод численного решения кинетического уравнения Больцмана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – I983. – Т. 23, № 6, – С. I454–I463.
I0. Григорьев Ю.Н. Класс точных решений одного нелинейного кинетического уравнения // Краевые задачи для вырождающихся уравнений гидродинамики. Дин. спл. среды. – Новосибирск, I976. – Вып. 30. – С. 30–43.
II. Григорьев Ю.Н., Михалицын А.Н. Численное исследование изотропной релаксации в газе с максвелловским взаимодействием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – I985. – Т. 25, № 5. – С. 742–756.
I2. Григорьев Ю.Н., Михалицын А.Н. Немонотонная релаксация в атомарном газе и кинетика пороговых процессов // Ж. прикл. матем. и техн. физ. – I985. – № 5. – С. 6–I4.
I3. Grigoriev Yu.N., Mikhalitsyn A.N., Yanenko N.N. Effects of distribution function nonequilibrium tails on relaxation and transfer processes in rarefied gases//Proc. 14th Intern. Symp. on RGD, ed. H. Oguchi.-Univ. of Tokyo Press, 1984, Vol.1.-P.51-60
I4. Grigoriev Yu.N., Mikhalitsyn A.N. Asymptotics of Boltzmann equation for high energy particles//Arch. Mech.-1987.-V.39.-N 4.-P.303-313.
I5. Григорьев Ю.Н., Мелешко С.В. Исследование инвариантных решений нелинейного уравнения Больцмана и его моделей. – Новоси-

бирск, 1986. - 51 с. - (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние, Ин-т теорет. и прикл. мех.; № 18-86).

16. Grigoryev Yu.N., Mikhalitsyn A.N. On study of high energy asymptotics of Boltzmann equation//Book of Abstracts. 15th Int. Symp. on RGD, Grado, Italy, June 16-20, 1986.-P.158-160.

17. Григорьев Ю.Н., Мелешко С. В. Групповой анализ интегродифференциального уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. - 1987. - Т. 297. - № 2. - С. 323-327.

18. Яненко Н.Н., Веретенцев А.Н., Григорьев Ю.Н. Гамильтонов формализм для пространственной системы малых вихрей в идеальной жидкости // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1979. - Т. 10, № 5. - С. 144-149.

19. Григорьев Ю.Н. Диаграммный метод Пригожина-Балеску в приложении к простейшим моделям гидродинамической турбулентности. Новосибирск, 1979. - 33 с. - (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 3).

20. Яненко Н.Н., Григорьев Ю.Н., Левинский В.Б., Шавалиев М.Ш. Неравновесная статистическая механика систем точечных вихрей в идеальной жидкости и ее приложения к моделированию турбулентности. - Новосибирск, 1982. - 38 с. - (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет и прикл. механики; № 22-32).

21. Grigoryev Yu.N., Yanenko N.N. Hamiltonian vortex models in the theory of turbulence//Arch. Mech.-1982.-V.34.-N 5-6.-P. 621-631.

22. Григорьев Ю.Н. Эволюционные уравнения для функции распределения завихренности в плоском случае // Ж. прикл. матем. и техн. физ. - 1983. - № 3. - С. 27-38.

23. Григорьев Ю.Н., Левинский В.Б., Яненко Н.Н. Гамильтоновы вихревые модели в теории турбулентности // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1982. - Т. 13, № 3. - С. 13-20.

24. Григорьев Ю.Н., Левинский В.Б. Модели когерентных вихревых структур в свободных кольцевых сдвиговых слоях и МГД-течениях типа Ленерта // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1984. - Т. 15, № 5. - С. 69-83.

25. Grigoryev Yu.N., Levinsky V.B., Yanenko N.N. Modeling of turbulence by ensembles of vortices with inviscid interaction//Arch.Mech.-1984.-V.36.-N2.-P.279-292.
26. Григорьев Ю.Н., Левинский В.Б. Автомодельное соотношение для мод Кельвина-Гельмгольца в свободном вращающемся слое с осевым магнитным полем // Магнитная гидродинамика. - 1984. - № 2. - С. 69-72.
27. Григорьев Ю.Н., Левинский В.Б. Вариационная модель организованной завихренности в плоском случае // Ж. прикл. матем. и техн. физ. - 1986. - № 5. - С. 60-68.
28. Grigoryev Yu.N., Levinsky V.B. The model of vortex structures in turbulent shear layer with collective interaction. Arch. Mech.-1987.-V.39.-N 4.-P.291-382.
29. Григорьев Ю.Н., Левинский В.Б. Вихревые течения с осевой симметрией и моделирование развитой турбулентности // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1986. - Т. 2, № 17. - С. 22-29.

Ответственный за выпуск — Григорьев Ю.Н.
Технический редактор — Баканова С.Г.

Подписано к печати 29.05.89г. МН 11217
Формат 60x84/16, Усл. печ. л. 2.0 Уч. изд. л. 2.0
Тираж 100 Заказ № 39 Бесплатно

Отпечатано на ротапринте ИТПМ СО АН СССР,
630090, Новосибирск, 90, ул. Институтская, 4/1