АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи
УДК 517.95

ШАПЕЕВ Василий Павлович

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

01.01.02 - дифференциальные уравнения
и математическая физика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Свердловск 1988

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Н.Х.Ибрагимов;

доктор физико-математических наук, профессор
А.В.Кажихов;

доктор физико-математических наук
А.В.Кряжимский.

Ведущая организация - Вычислительный центр СО АН СССР,
г.Иркутск.

Защита состоится "___" ___________ 1988 г. в ____ часов на заседании Специализированного совета Д 002.07.01 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук в Институте математики и механики Уральского отделения АН СССР (620066, г.Свердловск, ул.С.Ковалевской, 16).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института математики и механики Уральского отделения АН СССР.

Автореферат разослан "___" ___________ 1988 года.

Ученый секретарь
специализированного совета
к.ф.-м.н., ст.н.с. М.И.Гусев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Уравнения с частными производными являются наиболее распространенным и эффективным средством описания сложных процессов и законов материального мира. Поэтому методы построения решений систем дифференциальных уравнений играют большую роль в прикладной математике и математической физике, в решении многих задач науки, техники и народного хозяйства.

Хотя последние три десятилетия ознаменовались большим успехом численных методов решения дифференциальных уравнений на ЭВМ, тем не менее значение аналитических методов их решения в последнее время стало возрастать. Аналитические методы имеют свое важное непреходящее значение. Частные точные решения систем дифференциальных уравнений служат хорошими тестами для приближенных методов их интегрирования, дают представление о поведении отдельных решений и о структуре общего решения. Наличие теста полезно на разных этапах технологической цепочки решения задачи на ЭВМ. Оно помогает быстрее отладить программу, оценить погрешность результата и его достоверность. Знание точных решений дифференциальных уравнений позволяет глубже проникнуть в суть описываемых ими физических явлений.

Если для традиционных систем дифференциальных уравнений, таких,как, например, системы уравнений динамики идеального газа, в разработке проблемы построения, изучения и приложений точных решений имеются яркие образцы (в этом наибольший вклад принадлежит советским ученым: Чаплыгину С.А., Кочину Н.Е., Седову Л.И., Овсянникову Л.В., Яненко Н.Н., Годунову С.К., Франклю Ф.И., Станюковичу К.П., Никольскому А.А., Сидорову А.Ф., Ибрагимову Н.Х., Пухначеву В.В., Каждану Я.М. и др.), то при использовании новых моделей механики сплошной среды этот вопрос остается злободневным. Необходимо также дальнейшее развитие самих аналитических методов решения и исследования систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Цель работы состоит в обосновании, развитии и приложении к механике сплошной среды метода дифференциальных связей, являющегося методом выделения и построения классов точных решений систем уравнений с частными производными.

До начала цикла работ, вошедших в диссертацию, была сформулирована идея метода дифференциальных связей, хорошо развит метод вырожденного годографа (в котором имеют место конечные соотношения между зависимыми переменными), были отдельные примеры использования дифференциальных связей для построения точных решений дифференциальных уравнений (Гурса Э. , Яненко Н.Н., Комаровский Л.В.).

Научная новизна и практическая значимость работы состоит в том, что основные результаты, изложенные в ней, являются новыми. Это относится ко всем приведенным результатам по методу дифференциальных связей, по промежуточным интегралам дифференциальных уравнений второго порядка с тремя независимыми переменными, по разработке и решению задачи реализации на ЭВМ алгоритмов анализа на совместность систем дифференциальных уравнений, по приложениям метода дифференциальных связей к решению задач механики сплошной среды.

Автор защищает следующие положения и результаты:

- постановку и решение обратной задачи теории совместности систем дифференциальных уравнений в методе дифференциальных связей, на основе которой предложен способ классификации характеризуемых дифференциальными связями решений систем дифференциальных уравнений с частными производными как выделение различных классов ДП-решений и указан способ поиска таких решений - интегрирование ДП-систем;
- исследование с целью приложений и отыскание свойств ДП-систем и ДП-решений для неоднородных, квазилинейных, гиперболических систем дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, решение для них задачи Коши с особенностью;
- приложение метода дифференциальных связей к задачам одномерной газовой динамики и неупругой сплошной среды;
- разработку и осуществление реализации на ЭВМ алгоритмов анализа на совместность систем дифференциальных уравнений.

При непосредственном участии и под научным руководством автора создана на ЭВМ программа анализа на совместность систем дифференциальных уравнений, многие модули которой использованы в разработке комплекса программ анализа и построения разностных схем на ЭВМ.

Основные результаты работы сформулированы в заключительной части автореферата ("Основные результаты и выводы").

Апробация работы. Представленные в диссертации результаты по мере их получения регулярно докладывались на семинарах Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР и кафедры вычислительных методов механики сплошной среды Новосибирского государственного университета, на IУ, У, УI, УШ, IX, X Всесоюзных семинарах по аналитическим методам в газовой динамике, на Всесоюзном симпозиуме по дифференциальным и интегральным уравнениям (Душанбе, 1972), на Международном симпозиуме по теоретико-групповым методам в механике (Новосибирск, 1978), на советско-венгерском семинаре по дифференциальным уравнениям, теории аппроксимации и топологии (Новосибирск, 1981), на Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными (Новосибирск, 1983; дополнительный доклад), на П, УI, УП Всесоюзных школах по моделям механики сплошной среды, на советско-франко-итальянском симпозиуме по вычислительной математике (Париж, 1983), на Всесоюзном симпозиуме по нелинейным и тепловым эффектам в переходных волновых процессах деформации твердого тела (Таллин, 1973), на рабочей группе 2.5 ИФИП (Новосибирск, 1979), на Международном совещании по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике (Дубна, 1982), на УП и УШ Всесоюзных семинарах по комплексам программ математической физики, на семинарах Вычислительного центра СО АН СССР, Института гидродинамики СО АН СССР, ТГУ им. В.В.Куйбышева, МГУ им. М.В.Ломоносова, ИММ УрО АН СССР.

Диссертация в целом была доложена на семинарах Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР, НГУ им. Ленинского комсомола, Института гидродинамики СО АН СССР, Института математики и механики УрО АН СССР, по нелинейным дифференциальным уравнениям МГУ, Института математики АН СССР, Института математики СО АН СССР, Вычислительного центра СО АН СССР (г.Иркутск).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 39 работ, в том числе монография (совместно с А.Ф.Сидоровым и Н.Н.Яненко). Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-32] .

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения и списка литературы; содержит 250 страниц машинописного текста, 15 рисунков. Библиография насчитывает 223 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, проведен обзор и анализ исследований по методу дифференциальных связей, дана общая характеристика представленной работы и сформулировано кратко её содержание. Приведены библиографические справки по исследованиям функционально-инвариантных решений (В.И.Смирнов, С.Л.Соболев, Н.П.Еругин, М.М.Смирнов и др.), по групповому методу выделения и построения точных решений дифференциальных уравнений (значительный вклад в развитие теории и приложений которого сделан Л.В.Овсянниковым, его учениками и последователями Н.Х.Ибрагимовым, В.В.Пухначевым, В.М.Меньшиковым и др.), по общим методам анализа на совместность систем дифференциальных уравнений и упоминаются другие работы, имеющие отношение к рассматриваемым в диссертации вопросам.

В задачах, связанных с интегрированием систем дифференциальных уравнений, идеальным случаем является наличие единого аналитического представления всех решений системы дифференциальных уравнений, из которого путем проведения приемлемого числа арифметических действий находятся численные значения. Это может позволить решить различного рода вариационные задачи, связанные с системой, выделить отдельные классы решений, дать качественный анализ решений и найти конкретное численное решение краевых задач для неё. Однако для большинства уравнений механики и физики нет единого аналитического представления всех решений. Поэтому и получили развитие методы выделения и построения частных аналитических и других точных решений, интерес к которым возрос в связи с появлением большого материала численных расчетов, нуждающихся в осмыслении.

Метод дифференциальных связей был сформулирован Н.Н.Яненко в 1961 г. на IV Всесоюзном математическом съезде. Он является естественным обобщением метода промежуточного интеграла, применявшегося ещё в прошлом веке для построения решений уравнений второго порядка с частными производными с двумя независимыми переменными. При этом промежуточный интеграл является дифференциальным соотношением первого порядка относительно зависимой переменной, а в методе дифференциальных связей порядок и количество связей, присоединяемых к заданной системе уравнений, произволен. Известные для уравнений с частными производными решения с вырожденным годографом можно трактовать как решения, выделяемые конечными функциональными зависимостями. В библиографии приведено значительное количество работ из этой области, где ведущие позиции занимают советские ученые.

В методе дифференциальных связей выделение частных решений системы дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{S}) \qquad \mathcal{S}(x,u,p)=0$$

осуществляется путем присоединения к ней дополнительных дифференциальных соотношений

$$(\mathcal{D}) \qquad \mathcal{D}(x,u,p)=0$$

(здесь x – вектор независимых переменных, u – вектор зависимых переменных, p – производные от u по x). Полученная таким образом переопределенная система ($\mathcal{SD}$) в общем случае нуждается в исследовании на совместность. Суть метода дифференциальных связей заключается в том, что зачастую решения переопределенной системы ($\mathcal{SD}$) находятся легче, чем решения исходной системы ($\mathcal{S}$), поскольку произвол общего решения системы ($\mathcal{SD}$) меньше произвола общего решения исходной системы ($\mathcal{S}$).

После такой формулировки остаются некоторые неопределенности, которые не позволяют проводить теоретические иссследования по методу дифференциальных связей и в итоге затрудняют его приложение. При исследовании на совместность переопределенной системы ($\mathcal{SD}$) могут появиться новые дифференциальные уравнения, без учета которых нельзя изучать общие свойства решений системы ($\mathcal{SD}$). Введенное автором понятие ДП-системы свободно от этого недостатка и позволяет выделить определенный объект исследований – ДП -решения, дает естественную основу для классификации всех характеризуемых дифференциальными связями решений заданной системы ($\mathcal{S}$), исследовать в общем виде свойства таких решений и использовать их для приложений. Все эти вопросы также рассмотрены в представленной работе. Следует отметить, что теория метода локальная, но полученные с его помощью некоторые точные решения систем дифференциальных уравнений могут использоваться для решения краевых задач.

В главе I рассматриваются промежуточные интегралы дифференциальных уравнений второго порядка. В § I приведены некоторые необходимые и достаточные условия существования промежуточных интегралов у квазилинейных и линейных уравнений с двумя независимыми переменными. В частности, для линейного уравнения

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + c = 0 \qquad (I)$$

достаточным условием существования промежуточного интеграла является соотношение

$$\nu a_{11} \tau_x + \nu \xi \tau_y - b_1 \nu \tau + a_{11} \nu_x \tau - \xi \nu_y \tau - a_{11} \tau^2 = 0,$$

где $\xi = a_{11}\mu_i - 2a_{12}, \quad \nu = \xi + a_{11}\mu_i,$

$$\tau = b_2 - \mu_i b_1 - a_{11}(\mu_i)_x + \xi(\mu_i)_y,$$

а величины μ_i ($i = 1,2$) – корни характеристического уравнения $a_{11}\mu^2 - 2a_{12}\mu + a_{22} = 0$. Условием же существования функционально-инвариантных решений у уравнения (I) является более частное соотношение $\tau = 0$ (Н.П.Еругин). Следовательно, класс уравнений, имеющих решения, определяемые промежуточным интегралом, является более широким, чем класс уравнений, имеющих функционально-инвариантные решения.

Понятие промежуточного интеграла обобщено на случай уравнений второго порядка с тремя независимыми переменными (§ 2)

$$F(x_1, x_2, x_3, u, u_1, u_2, u_3, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{33}) = 0 \qquad (2)$$

$$(u_i = \partial u/\partial x, \quad u_{ij} = \partial u_i/\partial x_j)$$

(определение промежуточного интеграла в общем случае есть в*). В трехмерном случае в отличие от двумерного у уравнения (2) решения с функциональным произволом могут быть выделены как одним промежуточным интегралом, так и системой промежуточных интегралов

$$\begin{aligned} \Omega(x_1, x_2, x_3, u, u_1, u_2, u_3) &= C_1, \\ \Psi(x_1, x_2, x_3, u, u_1, u_2, u_3) &= C_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

---

*) Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: МИЭМ.- 1982. – 83с.

(C_1 , C_2 - константы). В двумерном случае для анализа совместности системы уравнений, определяющих промежуточный интеграл, достаточен алгоритм скобок Пуассона, а для исследования условий существования системы промежуточных интегралов требуется применение общих методов анализа на совместность.

В работе найдены необходимые и достаточные условия существования промежуточных интегралов и системы промежуточных интегралов для различных уравнений. Например, для линейного уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^{3} a_i u_i + \ell = 0, \qquad a_{ij} = a_{ji} \tag{4}$$

и системы линейных промежуточных интегралов

$$u_1 = d u_3 + f, \qquad u_2 = g u_3 + h \tag{5}$$

при дополнительном предположении показано, что имеет место

Теорема. Для того, чтобы линейное уравнение (4) с $\ell_u = 0$ имело систему линейных промежуточных интегралов (5) с $f_u = h_u = 0$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$d_2 + d g_3 = g_1 + g d_3, \qquad f_2 + d h_3 = h_1 + g f_3,$$
$$a_{11} d^2 + 2a_{12} d g + a_{22} g^2 + 2a_{13} d + 2a_{23} g + a_{33} = 0,$$
$$a_{11}(d_1 + d d_3) + 2a_{12}(g_1 + g d_3) + a_{22}(g_2 + g g_3) + 2a_{13} d_3 + 2a_{23} g_3 +$$
$$+ a_1 d + a_2 g + a_3 = 0,$$
$$a_{11}(f_1 + d f_3) + 2a_{12}(f_2 + d h_3) + a_{22}(h_2 + g h_3) + 2a_{13} f_3 + 2a_{23} h_3 +$$
$$+ a_1 f + a_2 h + \ell = 0$$

(здесь $f_i = \partial f/\partial x_i$, $g_i = \partial g/\partial x_i$, $h_i = \partial h/\partial x_i$).

Далее показано, что уравнение (4) с постоянными коэффициентами всегда имеет систему промежуточных интегралов с вещественными или комплексными d , g , f и h . Если

$$(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})a_1^2 + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})a_2^2 + (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})a_3^2 +$$
$$+ 2[(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})a_2 a_3 + (a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})a_1 a_3 +$$
$$+ (a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})a_1 a_2] \geq 0,$$

то уравнение (4) с постоянными коэффициентами имеет систему промежуточных интегралов (5) с вещественными постоянными d , g , f и h .

Проведено сравнение условий существования промежуточных интегралов дифференциального уравнения второго порядка с тремя независимыми переменными с известными условиями существования функционально-инвариантных решений. Приведены различные примеры, в том числе с помощью промежуточных интегралов уравнения с постоянными коэффициентами построено решение, не являющееся функционально-инвариантным решением. Условия существования у уравнения

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}-u_{tt}+b_1u_x+b_2u_y-\beta u_t=0$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0)$$

системы промежуточных интегралов совпадают с указанными М.М.Смирновым условиями существования функционально-инвариантных решений.

<u>В главе 2</u> дано уточнение формулировки метода дифференциальных связей (§ I), позволившее развить его, на примерах показаны некоторые возможности метода при отыскании частных решений систем дифференциальных уравнений, рассмотрена взаимосвязь с другими аналитическими методами.

Пусть дана система уравнений с частными производными

$$(\mathcal{S})\qquad \Phi_\nu\left(x,u,\frac{\partial^{|q|}u}{\partial x^q}\right)=0,\qquad \begin{pmatrix}\nu=1,2,\ldots,r_1,\\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{pmatrix}$$

где $q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ и $|q|=q_1+q_2+\ldots+q_n\leq k$, $u=(u_1,u_2,\ldots,u_{r_2})$. К ней присоединена система дополнительных дифференциальных уравнений (дифференциальных связей)

$$(\mathcal{D})\qquad \Psi_{\lambda_\beta}\left(x,u,\frac{\partial^{|q|}u}{\partial x^q}\right)=0\qquad \begin{pmatrix}\beta=1,2,\ldots,\ell,\\ \lambda_\beta=1,2,\ldots,i_\beta,\ |q|\leq j_\beta\end{pmatrix},$$

которая состоит из совокупности $\sum\limits_{\beta=1}^{\ell} i_\beta$ дифференциальных уравнений порядка j_β.

Вид дифференциальных связей Ψ_{λ_β} и в общем случае некоторых уравнений Φ_μ из системы ($\mathcal{S}$) можно не задавать априори, а определять апостериори, решая для системы ($\mathcal{S}\mathcal{D}$) обратную задачу теории совместности, которую можно сформулировать следующим образом.

Какого вида должны быть дифференциальные связи Ψ_{λ_β} и уравнения Φ_μ подсистемы ($\mathcal{S}'$) $\subset$ ($\mathcal{S}$) ,чтобы переопределенная система ($\mathcal{S}\mathcal{D}$) имела заданный произвол в своем решении?

На первом этапе решения обратной задачи теории совместности находится совокупность условий существования решения этой задачи, в общем случае она представляет собой систему уравнений с частными производными относительно функций Ψ_{λ_β} и Φ_μ :

$$\Omega_\delta\left(x, u, \Psi_{\lambda_\beta}, \Phi_\mu, \frac{\partial \Psi_{\lambda_\beta}}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\alpha}, \dots \right) = 0.$$

На втором этапе решения обратной задачи теории совместности нужно решить уравнения $\Omega_\delta = 0$, т.е. получить Ψ_{λ_β} и Φ_μ .

Определение. Система дифференциальных уравнений ($\mathcal{S}$) обладает $\mathcal{D}$-свойством, если система ($\mathcal{S}\mathcal{D}$), полученная объединением системы ($\mathcal{S}$) и системы дифференциальных связей ($\mathcal{D}$), совместна и находится в инволюции.

Условия того, что система ($\mathcal{S}$) обладает $\mathcal{D}$ -свойством, в систему ($\mathcal{D}$) входят i_β дифференциальных связей порядка j_β и при этом произвол решения системы ($\mathcal{S}\mathcal{D}$) зависит от K_α функций от ℓ_α аргументов, обозначим символом

$$\mathcal{D}^{i_1, i_2, \dots, i_m}_{j_1, j_2, \dots, j_m} \Pi^{K_1, K_2, \dots, K_p}_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p} .$$

Эти условия, где возможно, кратко назовем ДП-условиями. В общем случае они имеют вид системы уравнений $\Omega_\delta = 0$.

Определение. Система ($\mathcal{S}\mathcal{D}$), удовлетворяющая ДП-условиям, называется ДП-системой.

Определение. Решения системы уравнений ($\mathcal{S}$), являющиеся также решениями ДП-системы, называются ДП-решениями.

В работе предложен способ классификации частных решений систем дифференциальных уравнений в методе дифференциальных связей. Разные классы ДП-решений конкретной системы дифференциальных уравнений ($\mathcal{S}$) выделяются разными системами дифференциальных связей ($\mathcal{D}$). К системе ($\mathcal{S}$) последовательно присоединяются все больше дифференциальных связей ($\mathcal{D}$), оставляя более узкий произвол в решении системы ($\mathcal{S}\mathcal{D}$). При этом $\mathcal{D}^i_j \Pi^K_\ell$ - решения с разными индексами K и ℓ решают разные задачи Коши, которые можно ставить для системы ($\mathcal{S}$), и попадут в разные классы. Это свойство является основным при выяснении возможности примыкать непрерывно или разрывно разные ДП-решения друг к другу при построении более сложных решений системы ($\mathcal{S}$) и их использования для решения краевых задач. (Примеры классификации ДП-решений приведены в § 2 главы У, примеры конструирования более сложных решений из отдельных ДП-решений приведены в §§ I, 4, 5 главы У, теоремы о примыкании различных ДП-решений друг к другу приведены в § 2 главы IУ.)

Итак, для получения ДП-решений нужно в общем случае пройти следующую цепочку: записать систему ($\mathcal{SD}$); анализируя её на совместность, выписать ДП-условия; найти решение ДП-условий и тем самым определить вид системы ($\mathcal{SD}$); проинтегрировать систему ($\mathcal{SD}$).

В § 2 рассматривается вопрос взаимосвязи метода дифференциальных связей с другими методами. Прежде всего делается сравнение с методом автомодельных решений, которые для неоднородной системы n уравнений с частными производными относительно n неизвестных функций от двух независимых переменных не всегда существуют. Существование $\mathcal{D}_1^n \mathcal{T}_1^0$ -решений сводится к вопросу существования решений некоторой системы уравнений типа Коши-Ковалевской, ответ на который положителен, в частности, при аналитичности всех функций. В данном параграфе на примере уравнения $w_{xx} = (w^2)_{yy}$ показывается, как с помощью дифференциальных связей строятся автомодельные решения, указанные в работах Томатика и Тамада.

Применение метода промежуточного интеграла к уравнению Монжа-Ампера, к которому сводятся одномерные уравнения газовой динамики Мартину, Ладфорду и Ю.С.Завьялову позволило построить частные решения уравнений газовой динамики для некоторых уравнений состояния. При применении метода дифференциальных связей один из классов ДП-решений включает в себя эти решения, а уравнение состояния при этом имеет дополнительный произвол в одну функцию от одного аргумента в отличие от случая, когда существует указанный промежуточный интеграл. Следовательно, метод дифференциальных связей дает неформальное обобщение метода промежуточного интеграла.

Указывается на взаимосвязь метода дифференциальных связей с групповым методом.

Для анализа на совместность переопределенных систем дифференциальных уравнений, которые возникают при применении метода дифференциальных связей, в диссертации использованы методы Картана и Жане-Спенсера-Гольдсмита-Кураниши. В приложениях применение этих методов приводит к громоздким вычислениям в символьном виде. Возникает задача автоматизации таких вычислений на ЭВМ.

Автором были написаны формальные алгоритмы по обоим методам, которые позволили группе программистов реализовать их на ЭВМ.

Глава III посвящена в основном реализации с помощью символьных вычислений на ЭВМ алгоритмов анализа на совместность систем дифференциальных уравнений. Приводятся формальные записи алгоритмов и вычислительные схемы по шагам, в соответствии с которыми были написаны программы. Следует отметить, что реализация на ЭВМ сложных методов Картана и Жане-Спенсера-Гольдсмита-Кураниши была осуществлена впервые. При этом предусмотрены два случая: анализ на совместность конкретно заданной системы и решение обратной задачи теории совместности (ЭВМ находит условия на вид неопределенных функций, которые входят в выражения левых частей уравнений, и определяет характеры системы, приведенной в инволюцию).

В § I приводится формальное описание алгоритма Картана. В качестве исходного объекта для исследования рассматривается система Пфаффа, к анализу совместности которой легко сводятся вопрос о совместности квазилинейной системы уравнений с частными производными и после продолжения вопрос о совместности системы внешних дифференциальных уравнений. Выписаны все формулы, получающиеся на отдельных шагах алгоритма. В § 2 приводится вычислительная схема алгоритма и его описание, обсуждаются особенности реализации алгоритма на ЭВМ. В § 3 приведен (впервые) строгий вывод уравнений двойных волн в газовой динамике, который ЭВМ БЭСМ-6 сделала за 2 минуты. В § 4 обсуждаются возможные типы обратной задачи теории совместности, которые можно решить методом Жане-Спенсера-Гольдсмита-Кураниши. Приведены примеры. Дано доказательство одного утверждения, использованного в главе I при выводе условий существования системы промежуточных интегралов у уравнения второго порядка с частными производными с тремя независимыми переменными. Показано, как приводится в инволюцию система уравнений Навье-Стокса в переменных (u , v , p). Приведен простой пример того, что для получения правильного приближенного решения системы уравнений с частными производными необходимо привести её в инволюцию. В § 5 приводится вычислительная схема метода Жане-Спенсера-Гольдсмита-Кураниши и её описание. Обсуждаются особенности реализации алгоритма на ЭВМ. При этом предусматриваются как случай анализа на совместность конкретно заданной системы уравнений, так и случай решения обратной задачи теории совместности.

В качестве исходных данных для программы задается система дифференциальных уравнений с частными производными, указаны зависимые и независимые переменные, порядок системы, неопределенные функции $\varphi^{\kappa}(x,u,p)$(если они входят в выражения уравнений), вид решаемой задачи (прямая или обратная).

В результате работы программы может быть получено соотношение, противоречащее исходной постановке (типа функционального соотношения относительно независимых переменных), либо система приведена в инволюцию (третья возможность - ЭВМ сообщает, что оперативная память исчерпана, дальнейшее решение задачи прекращается). Одна из особенностей реализации алгоритма на ЭВМ заключается в том, что не всегда легко автоматизировать до конца проверку того, является ли конкретное выражение тождественным нулем вследствие других соотношений или нет. Например, в реализованном варианте не учтен случай, когда ранги некоторых матриц могут понижаться вследствие новых уравнений, получающихся при анализе на совместность заданной системы. Поэтому на печать выводятся все выражения, которые программа при подсчете рангов полагала неравными нулю. Апостериорный анализ пользователем результата, полученного на ЭВМ, позволяет получить достоверный результат.

Входная и выходная информация записывается в "фортраноподобном" виде, близком к обычной математической записи. Для данной программы исходная система в виде, разрешенном относительно некоторых старших производных, должна представлять собой отношение двух полиномов от независимых переменных, зависимых переменных, их производных и некоторых неопределенных функций (если вид системы неопределен до конца). Неопределенные функции позволяют зачастую сделать замену функций, входящих в выражения уравнений исходной системы и не являющихся рациональными функциями, так что в итоге получается система уравнений требуемого вида. Выбор РЕФАЛА в качестве языка программирования был обусловлен прежде всего доступностью для пользователей транслятора с него на момент начала данной работы.

Алгоритмы анализа на совместность сложны для реализации на ЭВМ, так как требуют выполнения значительного количества разнообразных действий. Программы получаются большими по объему. Имеются принципиальные трудности относительно использования внешней памяти ЭВМ при их реализации. Самая трудоемкая операция в алгоритме - подсчет рангов матриц, необходимый для проверки критериев инволютивности и получения характеров системы. Если такого рода операции проводить без каких-либо ухищрений, опираясь только на какой-нибудь один универсальный алгоритм (например, приведения матрицы к "треугольному виду"), то при решении прикладных задач они требуют большую оперативную память ЭВМ. По мере продвижения по шагам алгоритма происходит постоянный рост выражений в символьном виде. Математик при вычислениях "вручную" по данному алгоритму пользуется различными приемами (ухищрениями), которые позволяют ему бороться с ростом величин выражений:

- вводит промежуточные обозначения больших выражений, а обратную замену делает только тогда, когда требуется конкретный вид этих выражений;
- при возможных различных путях получения некоторых промежуточных результатов он выбирает путь, на котором будут меньшие длины обрабатываемых выражений;
- при подсчете рангов матриц, кроме основного алгоритма (типа приведения матрицы к "треугольному виду") может использовать дополнительно другие приемы (строки с большим числом нулевых элементов переставить вверх, а подобного рода столбцы влево) и т.п.

Моделирование приемов математика, которыми он пользуется при счете "вручную", существенно расширяет возможности использования ЭВМ. Указанные здесь три приема были отмоделированы в одном из вариантов программы. (Так, например, ЭВМ автоматически вводит промежуточные обозначения правых частей продолженной системы уравнений.) После этого мощь программы возросла: ЭВМ стала использовать меньший объем памяти в большинстве сосчитанных задач и уменьшила время счета. Разумеется, можно моделировать на ЭВМ и другие какие-то приемы человека, владеющего методом и умеющего проводить вычисления по нему. По-видимому, такой подход при использовании ЭВМ для проведения символьных вычислений по сложным математическим алгоритмам открывает новые возможности.

В § 6 приводятся другие задачи, решенные на ЭВМ. Например, она исследовала на совместность систему трехмерных уравнений динамики идеального газа, с присоединенной к ней дифференциальной связью $(\mathrm{rot}\, v, \nabla S)$ (в скобках стоит скалярное произведение). ЭВМ доказала, что такая переопределенная система находится в инволюции с характерами Картана $s_1 = 5$, $s_2 = 5$, $s_3 = 4$, $s_4 = 0$. Система уравнений газовой динамики без дифференциальной связи имеет в решении произвол пяти функций от трех аргументов. Следовательно, указанная дифференциальная связь выделяет $\mathcal{D}_1^4\Pi_3^4$ - решения этой системы. На ЭВМ были исследованы переопределенные системы, встречающиеся в данной работе, в книге Поммаре "Системы квазилинейных уравнений и псевдогруппы Ли" (Москва,"Мир", 1983), а также некоторые другие системы, встречающиеся в приложениях. В § 6 приведены результаты ещё по трем сосчитанным задачам. Для получения некоторых из этих результатов для человека требуются значительные усилия. И тот факт, что ЭВМ за две минуты получает уравнения двойных волн со строгим доказательством инволютивности системы, показывает эффективность и перспективность применения ЭВМ в подобных исследованиях.

В § 7 кратко излагается вопрос об использовании модулей описанной выше программы при создании комплекса программ по исследованию и построению разностных схем решения краевых задач для уравнений с частными производными.

В главе IУ приведены основные теоретические результаты диссертации по методу дифференциальных связей. Установлены различные общие свойства ДП-систем и ДП-решений, которые существенно используются в приложениях метода.

С помощью ДП-решений нельзя решить любую краевую задачу, поставленную для исходной системы. Но примыкая отдельные ДП-решения друг к другу, можно получить более сложные решения исходной системы и расширить возможности приложений ДП-решений. Примыкание может осуществляться непрерывно и с разрывом зависимых переменных задачи. Для гиперболических систем в первом случае примыкание осуществляется через характеристики, во втором - через поверхность сильного разрыва. Поэтому важно иметь для отдельных классов систем уравнений с частными производными в общем виде уравнения характеристик и соотношений вдоль них. Для приложений, которые приведены в следующей главе, важно установить существование и единственность решения задачи Коши с особенностью. В работе все эти вопросы рассматриваются для системы квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g(u,x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = f(u,x,t),$$

где $\mathcal{G}=(g_{ij})$ – матрица размерности $r\times r$ $(i,j=1,2,\dots,r)$, $u=(u^1,u^2,\dots,u^r)$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_r)$ – вектор-столбцы. К системе присоединяются q дифференциальных связей порядка m, таких, что они разрешимы относительно q старших производных по x в окрестности некоторой точки (x,u,p) , где p обозначает все производные $\partial^{|q|}u/\partial x^q$, $|q|\le m$. В предположении, что $L=L(u,x,t)$ – неособая матрица и $\mathcal{A}=L\mathcal{G}L^{-1}$, система уравнений и дифференциальных связей записывается в виде

$$(\mathcal{S})\qquad \mathcal{S}\equiv L\frac{\partial u}{\partial t}+\mathcal{A}L\frac{\partial u}{\partial x}-Lf=0, \tag{6}$$

$$(\mathcal{D})\qquad \mathcal{D}\equiv \mathcal{B}_1L\frac{\partial^m u}{\partial x^m}+\Psi\left(\mathcal{B}_2L\frac{\partial^m u}{\partial x^m},\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x^{m-1}},\dots,u,x,t\right)=0,$$

где матрицы $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ состоят из элементов

$$(\mathcal{B}_1)_{ij}=\delta^i_j,\quad (\mathcal{B}_2)_{kj}=\delta^{q+k}_j\quad (1\le i\le q,\quad 1\le k\le r-q,\quad 1\le j\le r),$$

δ^i_j – символ Кронекера.

Доказательства основных утверждений приведены для случая $m=1$ (к этому случаю при условии разрешимости можно свести случай системы дифференциальных связей произвольного порядка), хотя они проходят и для $m>1$. В случае гиперболической в $V_0(\mathcal{U})=\{a_0\le x\le b_0,\ 0\le t\le T,\ \|u\|\le\mathcal{U}\}$ (при любом $\mathcal{U}>0$ и $\|u\|=\sqrt{\Sigma(u^i)^2}$) системы $(\mathcal{S})$ в качестве L берется матрица, строками которой являются ℓ_i $(i=1,2,\dots,r)$ – базисные левые собственные векторы матрицы $\mathcal{G}$ (матрица $\mathcal{A}$ диагональная с элементами λ_i – собственными значениями матрицы $\mathcal{G}$).

В диссертации доказана

Теорема. Если система r уравнений $(\mathcal{S})$ гиперболическая, то переопределенная система $r+q$ уравнений в инволюции $(\mathcal{S}\mathcal{D})$ имеет $(r-q)$ характеристик, тангенсы углов наклона которых совпадают с собственными значениями матрицы $\mathcal{B}_2\mathcal{A}\mathcal{B}_2'$.

Для гиперболической системы $(\mathcal{S})$ с квазилинейными дифференциальными связями $(\mathcal{D})$ выписаны соотношения на решении переопределенной системы $(\mathcal{S}\mathcal{D})$ вдоль характеристик кратности μ среди которых μ соотношений – обычные соотношения вдоль характеристик гиперболической системы $(\mathcal{S})$, а дополнительные q соотношений появляются вследствие наличия q дифференциальных связей в системе $(\mathcal{S}\mathcal{D})$. Соотношения, аналогичные последним, имеют место и вдоль произвольной линии $x=x(t)$ на решении переопределенной системы $(\mathcal{S}\mathcal{D})$. Эти результаты приведены в § I. Среди других результатов этого параграфа можно отметить доказательство утверждения о необходимой квазилинейности в разрешенном виде связей $(\mathcal{D})$ системы в инволюции $(\mathcal{S}\mathcal{D})$ со строго гиперболической системой $(\mathcal{S})$. Более общее свойство связей $(\mathcal{D})$ имеет место в случае гиперболической системы $(\mathcal{S})$.

В § 2 рассматриваются задачи о примыкании различных ДП-решений друг к другу. Рассмотрим кроме $(\mathcal{D})$ ещё μ дифференциальных связей

$$(d) \qquad \mathcal{B}_3 L u_x + \Psi^{(3)}_{\tilde{y}} \mathcal{B}_4 L u_x + \Phi^{(3)} = 0, \qquad \tilde{y} = \mathcal{B}_4 L u_x .$$

Доказана

Теорема. Пусть система $(\mathcal{S})$ гиперболическая в $V_0(\mathcal{U})$, системы $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}})$ с квазилинейными дифференциальными связями

$$(\tilde{\mathcal{D}}) \qquad \mathcal{B}_1 L u_x + \Psi_y \mathcal{B}_2 L u_x + \Phi = 0, \qquad y = \mathcal{B}_2 L u_x$$

и $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}}d)$ со связями $(\tilde{\mathcal{D}}d)$ в инволюции, функции $\Psi_y, \Phi, \Psi^{(3)}_{\tilde{y}}$, $\Phi^{(3)} \in C^1(V_0(\mathcal{U}))$; $\mathcal{A}, L, f \in C^2(V_0(\mathcal{U}))$, линия Λ разделяет область V на подобласти V_+ и V_- и пусть в области V_+ задано решение $u^+(x,t) \in C^2(V_+ \cup \Lambda)$ системы $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}})$ такое, что линия Λ является μ-кратной характеристикой $x' = \lambda(u^+, x, t)$ системы $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}})$ на этом решении и не имеет характеристических направлений системы $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}}d)$. Тогда в некоторой примыкающей к Λ подобласти $\tilde{V}_- \in V_-$ существует единственное решение системы $(\mathcal{S}\mathcal{D}d)$ $u^-(x,t) \in C^2(\tilde{V}_-)$, которое непрерывно примыкает к $u^+(x,t)$ через линию Λ.

Здесь и далее $V = \{ a_0 \leqslant x \leqslant b_0, \ 0 \leqslant t \leqslant T \}$.

Основные моменты доказательства этой теоремы таковы: показывается, что на линии примыкания получаются данные Коши, непротиворечащие системе $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}}d)$; в конечном итоге все сводится к вопросу существования решения задачи Коши для некоторой линейной гиперболической системы уравнений (К.О.Фридрихс, Ф.Хартман, А.Винтнер, Б.Л.Рождественский и др.). Доказана

Теорема. Пусть система $(\mathcal{S})$ гиперболическая в $V_0(\mathcal{U})$, системы $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}})$ с квазилинейными дифференциальными связями $(\tilde{\mathcal{D}})$ и $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}}d)$ со связями $(\tilde{\mathcal{D}}d)$ в инволюции, функции $\Psi_y, \Phi, \Psi^{(3)}_{\tilde{y}}, \Phi^{(3)}$, $\mathcal{A}, L, f \subset C^1(V_0(\mathcal{U}))$, линия Λ разделяет область V на подобласти V_+ и V_- и пусть в области V_- дано решение $u^-(x,t) \in C^1(V_- \cup \Lambda)$ системы $(\mathcal{S}\tilde{\mathcal{D}}d)$, такое, что Λ является μ-кратной характеристикой $x'=\lambda(u^-,x,t)$ системы $(\mathcal{S}\bar{\mathcal{D}})$ на этом решении и не имеет характеристических направлений системы $(\mathcal{S}\bar{\mathcal{D}}d)$, при этом $\det(\mathcal{B}_1(\mathcal{A}-x'E_r)\mathcal{B}_1')\neq 0$, тогда в некоторой примыкающей к Λ подобласти $\tilde{V}_+\subset V_+$ любое решение $u^+(x,t)\in C^1(\tilde{V}_+)$ системы $(\mathcal{S})$, непрерывно примыкающее к $u^-(x,t)$ через линию Λ, необходимо является решением системы $(\mathcal{S}\bar{\mathcal{D}})$.

Если систему $\mathcal{S}$ можно записать в дивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(u,x,t)}{\partial x}=\bar{f}(u,x,t)$$

$$(\ g(u,x,t)=\varphi_u'(u,x,t),\quad f(u,x,t)=\bar{f}-\varphi_x'\ ),$$

то на линии сильного разрыва Π предельные значения решения с двух сторон $u^+(x,t)\big|_\Pi$ и $u^-(x,t)\big|_\Pi$ удовлетворяют известным условиям

$$\varphi(u^+,x,t)-\varphi(u^-,x,t)=N(u^+-u^-),\qquad (7)$$

где N - тангенс угла наклона линии Π в плоскости (x,t). Предположим, что линия Π делит область V на подобласти V_+ и V_- и что в области V_+ определено $\mathcal{D}\Pi_1^{r-q_+}$ - решение, а в области V_- - $\mathcal{D}\Pi_1^{r-q_-}$ - решение. Тогда u^+ и u^- удовлетворяют, соответственно, дифференциальным связям

$$\mathcal{B}_{1+}L_+u_x+\Psi_{y+}\mathcal{B}_{2+}L_+u_x+\Phi_+=0,\qquad (8)$$

$$\mathcal{B}_{1-}L_-u_x+\Psi_{y-}\mathcal{B}_{2-}L_-u_x+\Phi_-=0.\qquad (9)$$

Доказано, что на вопрос о возможности примыкания различных ДП-решений друг к другу через сильный разрыв с выполнением условий (7) ответ дает

<u>Теорема</u>. Пусть система (6) гиперболическая в $V_0(\mathcal{U})$, $\mathcal{A},L_+,L_-,f\in C^1(V_0(\mathcal{U}))$, системы (6), (8) и (6), (9) являются ДП-системами, $\Psi_{y+},\Phi_+,\Psi_{y-},\Phi_-\in C^1(V_0(\mathcal{U}))$ и в точке (x_0,t_0) искомой линии сильного разрыва Π заданы u_0^+ и u_0^-, такие, что $N\neq\lambda_i(u_0^+,x_0,t_0)$, $N\neq\lambda_l(u_0^-,x_0,t_0)$, $i=1,2,\dots,r$, где λ_i - собственные значения матрицы g, тогда для того, чтобы существовало решение системы (6) с сильным разрывом на линии Π, удовлетворяющее (7) и такое, что в V_+ **вплоть до линии** Π оно являлось бы $\mathcal{D}\Pi_1^{r-q_+}$ - решением класса $C^1(V_+)$ и принимало значение u_0^+ в точке (x_0,t_0), а в V_- **вплоть до** линии Π - $\mathcal{D}\Pi_1^{r-q_-}$ - решением класса $C^1(\bar{V}_-)$ и принимало

значение u_0^- в точке (x_0, t_0), необходимо и достаточно, чтобы система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathcal{B}_{1+}L_+\left(f^+-\frac{du^+}{d\tau}\right)+\mathcal{B}_{1+}(\mathcal{A}_+-NE_r)\mathcal{B}_{1+}'\Psi_{y+}\mathcal{B}_{2+}(\mathcal{A}_+-$$
$$-NE_r)^{-1}L_+\left(f^+-\frac{du^+}{d\tau}\right)+\Phi_+=0,$$

$$\mathcal{B}_{1-}L_-\left(f^--\frac{du^-}{d\tau}\right)+\mathcal{B}_{1-}(\mathcal{A}_--NE_r)\mathcal{B}_{1-}'\Psi_-\mathcal{B}_{2-}(\mathcal{A}_--$$
$$-NE_r)^{-1}L_-\left(f^--\frac{du^-}{d\tau}\right)+\Phi_-=0, \qquad \frac{dx_{\Pi}}{d\tau}=N$$

с начальными данными $u^+=u_0^+$, $u^-=u_0^-$, $x_{\Pi}=x_0$ при $\tau=t_0$ и система конечных соотношений (7) имели решение класса C^1 в окрестности точки $t_0\in(0,T)$.

Доказанные теоремы дают рабочие критерии для применения их в приложениях. В этом же параграфе приведены примеры, иллюстрирующие эти теоремы. В главе У показано их применение в приложениях.

Для приложений в динамике сплошных сред важное значение имеет следующая задача Коши с особенностью (предполагается, что в $(\tilde{\mathcal{D}})$ $rank(\mathcal{B}_1)=r-1$; система $(\mathcal{f})$ гиперболическая в $V_0(\mathcal{U})$; $L, \mathcal{A}, f, \Psi_y, \Phi\in C^1(V_0(\mathcal{U}))$, $0\in[a_0, b_0]$).

I. Пусть на дуге линии Λ: $x_\Lambda=x_\Lambda(t)$, $t\geqslant 0$, $x(0)=0$ задано $u_\Lambda(t)\in C^1$ так, что $\frac{dx_\Lambda}{dt}=\lambda_r(u_\Lambda(t), x_\Lambda(t), t)$, $\lambda_r=\mathcal{B}_2\mathcal{A}\mathcal{B}_2'$ и $u_\Lambda(t)$ удовлетворяет соотношениям вдоль единственного семейства характеристик системы $(\mathcal{f}\mathcal{D})$.

2. Точка $(0,0)$, лежащая на Λ, является особой для искомого решения: в ней $u(x,t)$ будет многозначна так, что её компоненты являются функциями только параметра α, и их значения $u=u_0(\alpha)\in C^1(\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1])$ определяют в пространстве R^r линию, удовлетворяющую уравнениям

$$(\mathcal{B}_1+\Psi_y(u_0(\alpha), 0, 0)\mathcal{B}_2)L(u_0(\alpha), 0, 0)u_0'(\alpha)=0, \qquad \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$$

и условию $u_0(\alpha_0)=u_\Lambda(0)$.

3. Для единственного семейства характеристик системы в точке (0,0) выполняется неравенство

$$\frac{\partial\lambda_r(u_0, 0, 0)}{\partial u}u_0'<0 \qquad (\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1).$$

Найти удовлетворяющее условиям I,2,3 решение $u(x,t)\in C^1(\Omega)$ системы $(\mathcal{f}\tilde{\mathcal{D}})$ в некоторой области Ω, часть границы которой совпадает с указанной дугой линии Λ в окрестности точки (0,0).

В § 3 доказана теорема существования и единственности решения этой задачи. Показано, что на нем при имеющих место в механике сплошных сред ограничениях на коэффициенты дифференциальных уравнений невозможна градиентная катастрофа.

Решенная здесь задача ($\tau>2$) является обобщением известной задачи ($\tau=2$) в случае неоднородных систем уравнений (Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - М.: Наука, 1978. - 687с.).

Глава У посвящена приложениям метода дифференциальных связей. В § I приведены различные ДП-решения одномерных уравнений газовой динамики. Для политропного газа найдены различные классы решений с однофункциональным произволом, среди которых содержатся известные решения: с линейным профилем скорости и Мартина-Ладфорда-Завьялова. Приведены различные решения с константным произволом и с двухфункциональным произволом (последнее для уравнения состояния специального вида). Они использованы для решения задач о движении газа с переменной энтропией под действием поршня, о движении ударной волны по покоящемуся неизэнтропическому фону.

В работе сообщается, что решение последней задачи использовано вычислителями для тестирования методов автоматического выделения фронтов волн при решении газодинамических задач на ЭВМ методами конечных разностей.

В § 2 дана классификация ДП-решений одномерных уравнений динамики неупругой сплошной среды

$$v_t = \frac{1}{\rho}\sigma_x, \qquad \varepsilon_t = v_x, \qquad \sigma_t = a(\sigma,\varepsilon)\varepsilon_t + c(\sigma,\varepsilon) \tag{I0}$$

(здесь σ - напряжение, ε - деформация, v - скорость, ρ - плотность, t - время, x - лагранжева координата). В § 3 приведены их различные решения. Прежде всего указано общее решение уравнений модели стандартного линейного тела ($c(\sigma,\varepsilon)$ линейна, $a=const$), когда между четырьмя константами, определяющими модель, существует одна зависимость. Для системы уравнений (I0), удовлетворяющей $Д^1_1П^2_1$ и $Д^2_1П^1_1$ - условиям, приведены $Д^1_1П^2_1$ - решения и $Д^2_1П^1_1$ - решения. Они использованы в § 4 для решения задач о деформировании неупругого стержня. (Отыскание $Д^1_1П^2_1$ - решений сводится к интегрированию двух уравнений относительно $\varepsilon(t,x)$ и $v(t,x)$.)

<u>Задача I</u>. Найти в области $0<t<T$, $0<x<\ell$ функции $\varepsilon(t,x)$, $v(t,x)$, удовлетворяющие уравнениям $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$ - системы, начальным $\varepsilon(0,x)=\varepsilon_{ст}$, $v(0,x)=0$ и граничным $v(t,0)=0$, $v(\ell,t)=u_0$ условиям (здесь ℓ - длина стержня).

<u>Задача 2</u>. Найти функцию $c=c(\sigma-\varphi(\varepsilon))$, удовлетворяющую уравнению $\sigma_t=a\varepsilon_t+c$ и заданному условию $\sigma(t,0)=\Phi(t)$ на решении задачи I, полагая, что $\sigma=\varphi(\varepsilon)$ является статической зависимостью $(\sigma\longleftrightarrow\varepsilon)$ и $c(0)=0$.

Конкретные расчеты по обеим задачам проведены, когда уравнение состояния $\sigma_t=a\varepsilon_t+c$ содержит пять констант, три из которых определяются из статических экспериментов, а две из динамического эксперимента, определяющего $\sigma(t,0)=\Phi(t)$. Для этого были использованы известные экспериментальные результаты.

При решении первой задачи сначала уравнение состояния оставалось частично неопределенным из-за констант, входящих в него. Найденное точное решение этой задачи использовалось при решении второй задачи путем сравнения с экспериментом, что позволило определить эти константы. С полученным уравнением состояния обсчитывался второй эксперимент с другой скоростью нагружения (решалась задача I). Сравнение с результатами, полученными во втором эксперименте, дало хорошее совпадение искомых величин.

В настоящее время не редкость, когда механики дают формулировку модели динамики сплошной среды с недоопределенным уравнением состояния, вид которого бывает затруднительно определить из эксперимента. Решение указанных задач позволяет высказать следующее предложение.

При поиске уравнения состояния, в котором есть произвольные функции, подлежащие определению, его произвол предлагается ограничить требованием того, чтобы система уравнений, описывающая рассматриваемую модель, обладала Д-свойством. А затем уравнение состояния доопределить путем сравнения численных решений задач с экспериментом.

В § 5 дано решение задачи о распаде разрыва для неупругой среды с внутренними изменениями. Взята известная модель сплошной среды (П.Пэжина, А.Савчук), динамика которой описывается системой уравнений

$$v_t = a\varepsilon_x + g\theta_x + c_\alpha \chi^\alpha_x, \quad \varepsilon_t = v_x, \quad \theta_t = h v_x + d, \quad \chi^i_t = \varphi^i(\varepsilon, \theta, \chi), \quad i = 1, 2, \ldots, r-3,$$

где x , t – лагранжевы переменные, v – скорость, ε – деформация, θ – температура, χ^i – внутренние переменные, $\psi = \psi(\varepsilon, \theta, \chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^{r-3})$ – удельная свободная энергия и

$$\sigma = \rho_0 \psi_\varepsilon, \quad a = \psi_{\varepsilon\varepsilon}, \quad g = \psi_{\varepsilon\theta}, \quad c_\alpha = \psi_{\varepsilon\chi^\alpha}, \quad h = -\psi_{\varepsilon\theta}/\psi_{\theta\theta},$$
$$d = [\psi_{\chi^\alpha} - \theta\psi_{\theta\chi^\alpha}]\varphi^\alpha / \theta\psi_{\theta\theta}.$$

Задача. Для системы уравнений (II) найти решение задачи Коши с разрывными кусочно-постоянными начальными данными, определенными на линии $t=0$ и имеющими единственный разрыв в точке $x=0$.

Для систем уравнений (IO), (II) нет решений – волн Римана, которые описывались бы конечными соотношениями между зависимыми переменными (инвариантами Римана). Установлено, что у этих систем при выполнении $\mathcal{D}^{r-1}_1 \Pi^1_1$ – условий существуют $\mathcal{D}^{r-1}_1 \Pi^1_1$ – решения с однофункциональным произволом, обладающие свойствами волн Римана. Решение задачи о распаде разрыва строится с помощью ДП-решений. В случае отсутствия ударных волн в конфигурации распада разрыва решение задачи сводится к последовательному интегрированию различных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в различных подобластях полуплоскости $t>0$. При этом (предложенная в данной работе) (σ, v) – диаграмма – аналог известной в газовой динамике (p, u) – диаграммы строится также интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет с помощью относительно простых средств рассчитать всю картину распада разрыва. В случае системы уравнений (II) рассмотрены все конфигурации, когда отсутствуют ударные волны. Для системы уравнений (IO) изучены все возможные конфигурации распада разрыва.

Для обоснования проведенных построений решения задачи о распаде разрыва в неупругих средах и решения других физических задач в диссертации существенно используются свойства ДП-решений, установленные в главе IУ: теоремы о примыкании через слабый и сильный разрывы, решение задачи Коши с особенностью, теорема о характеристиках, соотношения вдоль характеристик. Доказана теорема о единственности решения задачи о распаде разрыва в классе ДП-решений.

С целью проверки возможности применения полученных точных решений для тестирования численных методов решения задач динамики неупругих сред были проведены расчеты разностными методами нескольких конфигураций распада начального разрыва для системы уравнений (10). Совпадение численных результатов, найденных по разностной схеме, с ДП-решениями получилось с точностью до порядка аппроксимации разностной схемы.

В приложении дана краткая формулировка метода анализа на совместность систем уравнений с частными производными, обоснование и современное изложение которого дано в работах Спенсера, Гольдсмита, Кураниши, и Поммаре.

В заключительной части диссертации сформулированы основные результаты и выводы, изложенные в ней.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. На основе решения обратной задачи теории совместности систем дифференциальных уравнений в методе дифференциальных связей предложен способ классификации характеризуемых дифференциальными связями решений систем дифференциальных уравнений с частными производными как выделение различных классов ДП-решений и указан способ поиска таких решений - интегрирование ДП-систем. Этот способ классификации связан с произволом решения ДП-систем и числом дифференциальных связей в них.

2. Для гиперболических систем дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными найдены и сформулированы свойства примыкания ДП-решений друг к другу через слабый и сильный разрывы. Вследствие этого получены практические критерии для приложений при построении из отдельных ДП-решений более сложных. Решена задача Коши с особенностью для названных неоднородных систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих ДП-условиям, что позволяет для них строить решение задачи о распаде разрыва в классе ДП-решений и доказывать его единственность в этом классе. Получены условия существования промежуточных интегралов дифференциальных уравнений второго порядка с двумя и тремя независимыми переменными.

3. Дана полная классификация ДП-решений и найдены новые точные решения одномерных уравнений динамики неупругой сплошной

среды. Построены новые точные решения уравнений газовой динамики. Дано решение ряда физических задач, в том числе задачи о распаде разрыва в неупругой сплошной среде.

4. Разработана и осуществлена реализация на ЭВМ алгоритмов анализа на совместность систем дифференциальных уравнений. Показано, что применение ЭВМ для этих целей позволяет значительно облегчить и ускорить для человека (математика) проведение громоздких аналитических выкладок.

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной механики Сибирского отделения АН СССР.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНО В РАБОТАХ:

1. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н., Метод дифференциальных связей. - Новосибирск: Наука, 1984. - 272с.
2. Шапеев В.П. Задача о непрерывном примыкании ДП-решений одномерных уравнений динамики неупругой сплошной среды // Числен. методы механики сплошной среды. - Новосибирск: Ин-т теоретич. и прикладной механики и Вычислит.центр СО АН СССР. - 1974. - Т.5., №4. - С.116-125.
3. Шапеев В.П. Логическая схема алгоритма Картана //Комплексы программ математической физики: Сб.статей. - Новосибирск: Вычислит.центр СО АН СССР. - 1972. - С.87-97.
4. Шапеев В.П. Промежуточные интегралы дифференциальных уравнений второго порядка с тремя независимыми переменными //Числен. методы механ. сплошной среды. - Новосибирск: Ин-т теоретич. и прикладной механики и Вычислит.центр СО АН СССР. - 1985.- Т.16, №4. -С.150-164.
5. Шапеев В.П. Вычислительная схема метода Жане-Спенсера-Гольдсмита-Кураниши //Числен. методы механ.сплошной среды. - Новосибирск: Ин-т теоретич. и прикладной механики и Вычислит.центр СО АН СССР - 1984. - Т.15, № 2. - С.145-155.
6. Шапеев В.П. О промежуточных интегралах уравнений второго порядка в частных производных с тремя независимыми переменными //Докл. АН СССР. - 1984. - т.276, № 6. - С.1339-1343.
7. Арайс Е.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ //Докл. АН СССР. - 1974. - т.214, № 4. - С.737-738.

8. Фомин В.М., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Д -свойства систем одномерных уравнений динамики неупругой сплошной среды //Докл. АН СССР. - 1974. - Т.215, № 5. - С.1067 - 1070.
9. Распопов В.Е., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Д -свойства системы уравнений симметричных течений газа //Докл.АН СССР. - 1979. - Т.224, № 2. - С.308-311.
10. Мелешко С.В., Шапеев В.П.,Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и задача о распаде произвольного разрыва //Докл. АН СССР. - 1980. - Т. 254, № 4. - С.796-798.
11. Ганжа В.Г., Мелешко С.В., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация на ЭВМ алгоритма исследования на совместность систем уравнений в частных производных //Докл. АН СССР. - 1981. - Т.261, № 5. - С.1044-1046.
12. Распопов В.Е., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Применение метода дифференциальных связей к одномерным уравнениям газовой динамики //Изв. вузов. Математика. - 1974. - № 11 (150). - С.69-74.
13. Распопов В.Е., Шапеев В.П. Об огибающих одного частного решения консервативных систем уравнений //Числен.методы механ. сплошной среды. - Новосибирск: Ин-т теоретич. и прикладной механики и Вычислит.центр СО АН СССР. -1970. - Т.1, № 5. - С.78-86.
14. Распопов В.Е., Шапеев В.П. К вопросу о существовании промежуточных интегралов // Там же. - 1970. - Т. 1, № 2. - С.76-81.
15. Фомин В.М., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Применение метода дифференциальных связей к построению замкнутых математических моделей, описывающих одномерные динамические процессы в сплошной среде //Там же. - 1973. - Т. 4, № 3. - С.39-48.
16. Жижин А.Е., Шапеев В.П. К вопросу о непрерывном примыкании частных решений систем дифференциальных уравнений //Там же. - 1975. - Т. 6, № 2. - С.20-25.
17. Жижин А.Е., Шапеев В.П. О непрерывном примыкании ДП-решений гиперболических систем уравнений //Там же. - 1977. - Т. 8, № 7. - С.44-52.
18. Распопов В.Е., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей для уравнений одномерной газовой динамики //Там же. - 1977. - Т. 8, № 2. - С.100-105.

19. Распопов В.Е., Шапеев В.П. Д-свойства некоторых уравнений второго порядка //Там же. - 1978. - Т. 9, № 6. - С.119-124.
20. Мелешко С.В., Шапеев В.П. Приложение ДП-решений к задаче о распаде произвольного разрыва в неупругой сплошной среде //Там же. - 1979. - т. 10, № 6. - С.85-96.
21. Мелешко С.В., Шапеев В.П. Задача Гурса для неоднородных систем дифференциальных уравнений //Там же. - 1980. - Т. 11, № 7. - С.109-117.
22. Ганжа В.Г., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П. Реализация алгоритма скобок Пуассона на ЭВМ //Там же. - 1981. - Т. 12, № 4. - С.48-52.
23. Мелешко С.В., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Об одной задаче о распаде произвольного разрыва //Там же. - 1982. - Т. 13, № 5. - С.77-85.
24. Яненко Н.Н., Жижин А.Е., Распопов В.Е., Шапеев В.П. О методе дифференциальных связей //Тез.докл.международ.симп. "Теоретико-групповые методы в механике". - Новосибирск, 1978. - С.24.
25. Валиуллин А.Н., Ганжа В.Г., Мелешко С.В., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Символьные преобразования в методах решения задач математической физики //Комплексы прогр.мат. физ.: Сб.статей. - Новосибирск: Ин-т теоретич. и прикладной механики СО АН СССР. - 1982. - С.123-129.
26. Валиуллин А.Н., Ганжа В.Г., Мелешко С.В.,Мурзин Ф.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Символьные преобразования в методах решения задач математической физики //Комплексы прогр.мат. физ.: Материалы УП Всесоюзн.семин. по комплексам прогр. мат.физ. - Новосибирск: Ин-т теоретич. и прикладной механики СО АН СССР. - 1982. - С.123-129.
27. Ганжа В.Г., Мелешко С.В., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Об использовании ЭВМ для анализа на совместность систем дифференциальных уравнений //Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике: Материалы Междунар.симпоз. - Дубна: ОИЯИ. - 1983. - С.125-131.
28. Мелешко С.В., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей //Физическая механика неоднородных сред: Материалы УП Всесоюзн.семин. по моделям механики сплошной среды. - Новосибирск: Ин-т теоретич. и прикладной механики СО АН СССР. - 1984. - С.3-13.

29. Мелешко С.В., Шапеев В.П. Применение метода дифференциальных связей к описанию распространения волн в упруговязкопластических средах //Аннот.докл. 6 Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике (24-30 сент. 1985г., Ташкент). - - Ташкент, 1986. - С.450.

30. Fomin V.M., Shapeev V.P., Yanenko N.N. Modelling of continuum Mechanics Problems with large Deformations //J.Comp. Meth.in appl. Mech. Engin. - 1982.- N 32. - P.157-197.

31. Meleshko S.V., Shapeev V.P., Yanenko N.N. The Problem of the Breakdown of on Arbitrary Discontinuity //IUTAM Symposium Non-linear Deformation Waves, Abstracts.-Tallin.-1982.- P.33.

32. Valiullin A.N., Ganzha V.G., Mazurik S.I., Meleshko S.V., Shapeev V.P., Yanenko N.N. Symbolic Manipulatios and their Applications to Constructing new exact Solutions and difference Schemes// Proc. of 6-th Joint Symp. on numerical Solutions of non linear Problems.- Paris.- 1983. - P.314-329.

Ответственный за выпуск Шапеев В.П.
Подписано к печати 25.02.88г. МН 08127
Формат 60x84/16 Усл. печ. л.1.8 Уч.изд.л.1.75
Тираж 100 Заказ № 14 Бесплатно

Отпечатано на ротапринте ИТПМ СО АН СССР
630090, Новосибирск 90, ул. Институтская, 4/1