А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

БОЯРИНЦЕВ Юрий Еремеевич

УДК 517:518.12

ВЫРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.07.– вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 1983

Работа выполнена в Иркутском Вычислительном центре Сибирского отделения Академии наук СССР

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

Доктор физико-математических наук, профессор
Рождественский Б.Л.

Доктор физико-математических наук
Ильин В.П.

Доктор физико-математических наук
Шокин Ю.И.

ВЕДУЩЕЕ ПРЕДПРИЯТИЕ: - Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР

Защита состоится________________________
на заседании специализированного совета по защите докторских диссертаций Д 002.10.01 при Вычислительном центре Сибирского отделения Академии наук СССР. Новосибирск,90, проспект академика М.А.Лаврентьева,6

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отделения ГПНТБ (пр. академика М.А.Лаврентьева, 6)

Автореферат разослан______________198 г.

Ученый секретарь специализированного совета, кандидат физико-математических наук С.И.Кабанихин

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Актуальность темы. К необходимости решения и исследования систем дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно старших производных (в частности, так называемых алгебро-дифференциальных систем), приводят многие практически важные задачи. К таким задачам относятся, например, задачи о расчёте переходных процессов в устройствах автоматического управления и в сложных электронных или электроэнергетических системах, задачи о решении уравнений Навье-Стокса, описывающих распределение давлений и скоростей в вязкой несжимаемой жидкости и др.

Разработка приближённых методов и теории решения таких задач в настоящее время является актуальной областью деятельности математиков-прикладников и других специалистов. Однако теории, хорошо приспособленной для целей конструирования численных алгоритмов решения систем, не разрешённых относительно старших производных, в настоящее время нет. В результате в литературе часто появляется описание различных численных методов, не достаточно или совсем необоснованных.

Всё вышеизложенное относится также и к рассмотренным в диссертации системам линейных уравнений

$$A(t)\,x'(t) = B(t)\,x(t) + f(t), \qquad (1)$$

$$\left[A(t)\;x(t)\right]' = B(t)\,x(t) + f(t), \qquad 0 \le t \le 1, \qquad (2)$$

в которых $A(t)$ и $B(t)$ - $(m\times n)$-матрицы, причём при $m=n$ матрица $A(t)$ может быть особенной.

Целью работы является 1° выяснение (на основе использования различных обобщённых обратных матриц) чётких постановок задач для уравнений (1), (2) при условиях, заданных с помощью интегралов Стилтьеса

$$\int_0^1 [d\,\mathfrak{F}(s)]\, C(s)\, x(s) = a \tag{3}$$

или

$$\int_0^1 [d\,\mathfrak{F}(s)]\, C(s)\, A(s)\, x(s) = a, \tag{4}$$

где $\mathfrak{F}(s)$, $C(s)$ соответственно $-(p \times q)$, $(q \times n)$ или $(q \times m)$ - матрицы, причем элементы матрицы $\mathfrak{F}(s)$ суть функции ограниченной полной вариации, а элементы матрицы $C(s)$ непрерывны; 2° исследование возможностей применения разностных методов решения поставленных задач и, с этой целью, а) построение формул и выяснение структуры общих решений поставленных задач, б) изучение вопросов корректной постановки и в) построение теории устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнения с вырожденной матрицей при производных.

<u>Научная новизна</u> диссертации состоит в том, что в ней на основе систематического использования различных обобщенных обратных матриц (полуобратных, псевдообратных и обратных матриц Дразина) строится новый, весьма общий и конструктивный аппарат для решения, исследования и построения основ теории устойчивости систем вида

$$A(\lambda x) = Bx + f, \tag{5}$$

$$\lambda(Ax) = Bx + f, \tag{6}$$

в которых роль λ может выполнять дифференциальный или разностный оператор, а матрицы A и B суть $(m \times n)$- матрицы, причем при $m = n$ матрица A может быть особенной. Попутно, в связи с изучением пар матриц (A,B) из (5), (6), получаются новые результаты относительно обобщенных обратных матриц.

<u>Теоретическая и практическая ценность</u> работы определяется тем, что представленные в ней теоретические результаты открывают перспективу для разработок численных (в том числе, разностных) методов решения систем (I), (2), а также дают конкретную область для применений многочисленных разработок, связанных с псевдообращением матриц. Результаты диссертации уже позволили создать первый вариант пакета программ для решения задач типа (I), (3)

и (2), (4). Кроме того, в диссертации содержатся все предпосылки для качественного исследования систем (1), (2) и их разностных аппроксимаций.

Апробация работы. Направление исследований было одобрено Ученым Советом Сибирского энергетического института СО АН СССР под председательством члена-корреспондента АН СССР Ю.Н.Руденко (1974 г.). Тема диссертации утверждена Ученым Советом Иркутского ВЦ СО АН СССР под председательством члена-корреспондента АН СССР В.М.Матросова (январь 1981г.). Все результаты диссертации по мере их получения регулярно докладывались на семинаре по вычислительной математике в Иркутском ВЦ СО АН СССР, на межлабораторном математическом семинаре СЭИ СО АН СССР и на ежегодных научных конференциях Иркутского госуниверситета им. А.А.Жданова. Кроме того, результаты работы докладывались: на Ляпуновских чтениях в Иркутском ВЦ СО АН СССР (7-9 июня 1978 г., 16-18 июня 1980 г. и 7-8 июня 1982 г.); на V и VI Всесоюзных семинарах "Комплексы программ математической физики" под руководством академика Н.Н.Яненко (Миасс, 1978 г., Днепропетровск,1979 г.); на семинаре ВЦ СО АН СССР "Методы вычислительной и прикладной математики" под руководством академика Г.И.Марчука (Новосибирск, 1977 г.); на семинаре ИТПМ СО АН СССР под руководством академика Н.Н.Яненко (1977 г.); на конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 6-9 июня 1981 г.); на Всесибирской школе "Методы вычислительной математики" под руководством академика Г.И.Марчука (Шушенское, 1980 г.); на II Сибирской школе молодых ученых по технологии разработки пакетов прикладных программ под руководством академика Н.Н.Яненко (Иркутск, 1980 г.); на семинаре в Отделе вычислительной математики АН СССР под руководством А.А.Абрамова, В.В.Воеводина, Ю.А.Кузнецова, В.И.Лебедева (Москва, апрель 1982 г.); на семинаре ИТПМ СО АН СССР под руководством академика Н.Н.Яненко (июнь 1982 г.); на школе по технологии создания пакетов прикладных программ под руководством члена-корреспондента АН СССР В.М.Матросова (7-16 сентября 1982 г., Владивосток); на Областной математической конференции, организованной Иркутским Отделением Сибирского математического общества (ноябрь 1982 г.); на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений под руководством профессора В.М.Миллионщикова (Москва, МГУ, 6 декабря 1982 г.); на Всесоюзной конференции по вычислительным методам линейной алгебры (август 1982 г.); на семинаре ВЦ СО АН СССР под руководством доктора ф.- м. наук В.П. Ильина (апрель 1983 г.); на совещании международной Рабочей группы "Алгоритмы и программные комплексы численного анализа" под руководством академика А.А.Самарского (апрель 1983 г., г. Тбилиси).

Результаты диссертации были использованы при создании пакета програм SINODE ("Численные методы интегрирования сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений"). Межведомственная комиссия под председательством члена-корреспондента АН СССР А.С.Алексеева, действовавшая на основании распоряжения Президиума СО АН СССР, признала пакет годным к эксплуатации. Пакет создан сотрудниками лаборатории вычислительной математики Иркутского ВЦ СО АН СССР (отв. исполнитель А.А.Логинов).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения, в совокупности включающих 4I параграф. Объем работы (без списка литературы) - 300 машинописных страниц. Библиография включает 70 наименований.

II. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В начале Введения приводится двенадцать примеров, поясняющих принятые в диссертации обозначения и в какой-то мере, подтверждающих актуальность темы. Затем делается обзор литературы, имеющей отношение к диссертации. Кратко этот обзор сводится к следующему.

Насколько известно автору, литература, посвященная изучению и численному решению систем вида (5), (6) (в частности, (I), (2)) с произвольными матрицами, в настоящее время невелика. Конечно, это замечание не относится к случаям различных сингулярностей, связанных с вырождением коэффициентов в отдельных изолированных точках: литература по этим вопросам весьма обширна, а история изучения случаев вырождения в изолированных точках чрезвычайно продолжительна. Однако предлагаемая вниманию диссертация этому не посвящена. В ней речь идет о системах (I), (2) и их разностных аналогах, пара матриц (A,B) в которых имеет постоянную каноническую структуру на всем промежутке, на котором ведется исследование или решение системы.

Среди работ, посвященных системам (I), (2) и так или иначе связанных с постоянством структуры пары матриц (A,B), прежде всего, отметим книгу Ф.Р.Гантмахера ("Теория матриц". М., Наука, I966), в которой на основании теории элементарных делителей для случая постоянных матриц построено общее решение системы (I). К этому результату примыкают результаты Wilkinson'a J.H. (The differential system $Bx' = Ax$ and generalized eigenvalue problem $Au = \lambda Bu$ - Nat. Phys. Lab., Rep. NAC 73, 1977). Системам типа (I), (2) с переменными матрицами посвящены следующие работы.

В работе Ю.Д.Шлапака ("Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных." - Укр. матем.журн., №I, №27, I975) рассматривается система $P(t)\dot{x} = A(t)x$, где $P(t), A(t)$ являются периодическими, а матрица $P(t)$ имеет неизменную структуру по нулям для $t \in (-\infty, \infty)$. Доказывается, что исходную систему невырожденной заменой переменных можно привести к определенному каноническому виду. В другой статье того же автора ("О приводимости линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных." - Мат.физика, вып.2I, I977) рассматривается тот же вопрос и даются признаки, когда матрица $P(t)$ имеет неизменную структуру при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

В работе В.А.Еременко ("О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных".- Укр. матем.журн., 32, № I, I980) рассматривается система $P(t)\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $0 \le t < \infty$, в которой P, A, f - также периодические, причем $\operatorname{rank} P(t)$ не зависит от t, и доказывается, что существует ортогональная матрица V такая, что $V'PV = (Q\ 0)^T$ при всех $t \in (0, \infty)$, а также даются достаточные условия для того, чтобы порядок системы, полученной из исходной после подстановки $x = Vy$, можно было понизить так, чтобы система меньшего порядка обладала теми же свойствами, что и исходная система, или матрица при производных в ней была неособенной.

В статье В.П.Скрипника ("Вырождающий параметр и вырожденные уравнения" - Литовский матем. сб. XX, № I, I980) изучается система $(Ax)' = B(t)x + f$, $x(0) = x_0$, $t \in [a, b]$, в которой A - постоянная симметричная $(n \times n)$ - матрица ранга $n-1$. При некоторых предположениях о спектре симметричной части матрицы $B(t)$, в частности, обеспечивающих неособенность $B(t)$, доказывается существование решения исследуемой системы, причем решение определяется особым образом. Далее рассматривается система, зависящая от малого параметра ε и формулируются условия, при которых решение системы при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению вырожденной системы. Из перечисленных выше работ эта работа больше всего примыкает к нашим исследованиям: это так называемый регулярный случай (в главе 5 диссертации он подробно рассмотрен при значительно менее жестких ограничениях).

Отношение к нашей работе имеет также статья Campbell'a S.L., Meyer'a C.D., Rose N.J ("Application of Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients - SIAM J Appl. Math, v 31, N3, 1976), в которой для решения системы (I) применяется обратная матрица Дразина (Drazin M. P. "Pseudoinverses in associative rings and semigroups - Amer. Math. Monthly, v. 65, 1958), но лишь в случае системы, с постоянными квадратными матрицами, приводящейся, как легко показать, к регулярной системе. В предлагаемой вниманию диссертации обратная матрица Дразина A^{D} к матрице A считается ассоциированной с единичной матрицей E, что приводит к обобщению: вместо матрицы A^{D} применяется матрица $A^{B} = (B^{-}A)^{D}B^{-}$, где B^{-} - некоторая полуобратная матрица к матрице B (при B = E имеем $A^{B} = A^{D}$), и это позволяет получить общие результаты относительно систем (I), (2) с переменными и прямоугольными матрицами.

Следующая группа статей выполнена сотрудниками Иркутского ВЦ СО АН СССР. Некоторые из этих статей написаны в соавторстве со мной.

Прежде всего отметим статью Ю.Е.Бояринцева и В.М.Корсукова ("Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений." - В кн.: Вопросы прикладной математики. Иркутск, изд. СЭИ СО АН СССР, 1975 г.), содержащую обоснование неявного метода Эйлера для решения системы (I) в случае, когда для некоторого числа c $\det(A - cB) \neq 0$, матрицы A и B постоянны. Отметим ещё работу тех же авторов ("Структура общего непрерывно дифференцируемого решения краевой задачи для сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений." - В кн.: Вопросы прикладной математики. Иркутск, изд. СЭИ СО АН СССР, 1977 г.), в которой для решения системы (I) с произвольными постоянными матрицами A и B использована, как и в выше упомянутой работе Campbell'a и др., обратная матрица Дразина и получены более общие результаты.

Статьи В.Ф.Чистякова (I° "Об одном способе приближенного решения задачи Коши для сингулярных линейных систем ОДУ с постоянными коэффициентами методом градиентного спуска." - В кн.: Численные методы анализа прикладная математика . Иркутск, изд. СЭИ СО АН СССР, 1980 г.; 2° "О решении линейных сингулярных систем ОДУ с постоянными коэффициентами методом исключения неизвестных." - В кн.: Методы оптимизации и их приложения. Иркутск, изд. СЭИ СО АН СССР, 1979; 3[c] "О свойствах одного класса сингулярных линейных систем ОДУ." - В кн.: Прикладная математика и пакеты прикладных программ. Иркутск, изд. СЭИ СО АН СССР, 1980) посвящены различным аспектам приближенного решения систем (1).

Предлагаемая вниманию диссертация написана по материалам работ [1] - [12], список которых помещен в конце автореферата. Она является итогом собственных исследований автора.

Переходим к краткому описанию содержания глав диссертации.

Г л а в а I, которая называется "Обобщенные обратные матрицы и некоторые их применения", самая большая по объему. И это не случайно: в ней подробно изложены почти все основные идеи, на основании которых строятся общие решения вырожденных систем дифференциальных и разностных уравнений и приведены необходимые для этого результаты исследований различных свойств обобщенных обратных матриц. По-существу, в этой главе формируется аппарат для построения теории устойчивости систем (1), (2) и их разностных аппроксимаций.

В § 1 дается описание множества полуобратных A^- и инверсных полуобратных $A^\sim$ матриц к матрице A, т.е. матриц, удовлетворяющих соответственно уравнениям

$$A A^- A = A$$

и

$$A A^\sim A = A, \qquad A^\sim A A^\sim = A^\sim$$

Приводятся две формулы блочного полуобращения матриц.

В § 2 для полноты приводятся известные результаты о псевдообратной матрице A^+, удовлетворяющей системе

$$A A^+ A = A, \qquad A^+ A A^+ = A^+,$$

$$(A A^+)^* = A A^+, \quad (A^+ A)^* = A^+ A.$$

В § 3 с помощью полуобратных матриц выписываются условия совместности и общее решение матричной системы

$$A X B = C$$

(относительно X). Кроме того, даются формулы для нахождения всех постоянных (не зависящих от $t \in [0,1]$) решений системы

$$\mathcal{M}(t) X = \mathcal{N}(t)$$

с переменными матрицами $\mathcal{M}(t)$ и $\mathcal{N}(t)$ и выводятся условия существования таких решений.

В § 4 строятся матрицы, отображающие линейные векторные пространства соответствующей размерности на $\ker A \cap \ker B$, $\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$, $\mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{Im}\, B$, $\ker A + \ker B$, $\mathrm{Im}\, A \cap \ker B$, $\ker A + \mathrm{Im}\, B$ и выводятся следствия, касающиеся рангов и дефектов блочных матриц, а также рангов и дефектов произведений матриц.

В § 5 описывается известная, но несколько уточненная, каноническая форма произвольного пучка матриц $A + \lambda B$ и для подготовки к исследованию систем (I), (2) выясняется, когда существует комплексное число c, при котором $\operatorname{def}(B - cA) = 0$.

В § 6 выписываются полуобратные и инверсные полуобратные матрицы блоков канонической формы с тем, чтобы показать, что все множество полуобратных матриц к матрицам А и В из пучка $A + \lambda B$ не исчерпывается полуобращением их канонических блоков.

В § 7 доказываются следующие леммы.

Лемма I. Если x есть решение уравнения (5), то существует вектор u такой, что пара (x, u) является решением системы

$$\lambda x = A^- B x + A^- f + u, \tag{7}$$

$$(E - AA^-) B x = -(E - AA^-) f, \tag{8}$$

$$A u = 0. \tag{9}$$

Обратно, если пара (x, u) есть решение системы (7) - (9), то вектор x является решением уравнения (5).

Лемма 2. Если x есть решение уравнения (6), то пара (y, u), где $y = Ax$, $u = (E - A^- A)x$ является решением системы

$$\lambda y = BA^- y + Bu + f, \tag{10}$$

$$(E - AA^-) y = 0, \tag{11}$$

$$A u = 0. \tag{12}$$

Обратно, если пара (y, u) есть решение системы (I0) - (I2), то вектор $x = A^- y + u$ является решением уравнения (6).

Леммы I и 2 справедливы, когда λ - число, либо разностный или дифференциальный оператор. В последнем случае они должны быть уточнены введением некоторых требований гладкости, и это делается в соответствующих местах диссертации.

В конце этого параграфа выводятся признаки того, что при некотором числе c $\det(B - cA)=0$.

В § 8 вводится понятие вполне совершенной пары матриц (A,B); по определению это есть упорядоченная пара, для которой $(E-AA^{-})B=0$. Очевидно, что если пара матриц (A,B) вполне совершенна, то (8) есть просто условие совместности системы (5). В этом параграфе показывается, что решение любой системы (5) с постоянными матрицами A и B может быть сведено к решению системы с вполне совершенной парой матриц. Для этого в рассмотрение вводится две цепочки матриц

$$A_{i+1} = AR_i, \quad B_{i+1} = BR_i, \qquad i=0,1,\dots, \tag{13}$$

где

$$R_i = E - T_i^{-}T_i, \quad T_i = P_i B, \quad P_i = E - A_i A_i^{-}, \quad A_0 = A$$

и показывается, что существует такое целое число $k \geq 0$, при котором $(E-A_k A_k^{-})B_k=0$. Наименьшее из таких чисел названо правым индексом пары (A,B) и доказано, что правый индекс пары матриц (A,B) не зависит от конкретного выбора полуобратных матриц, применяемых при формировании цепочек (13).

Справедлива лемма:

Л е м м а 3. Уравнение (5) с постоянными A и B эквивалентно системе

$$x = R_{k-1}x - G_{k-1}, \tag{14}$$

$$A_k(\lambda x) = B_k x + F_k, \tag{15}$$

в которой

$$G_{k-1} = T_{k-1}^{-} T_{k-1} T_{k-1}^{-} P_{k-1} f_{k-1},$$

$$F_k = f_k - BG_{k-1},$$

где векторы f_k и f_{k-1} получаются с помощью реккурентного соотношения

$$f_i = f + A(\lambda G_{i-1}), \qquad i=0,\dots,k$$

(здесь нужно положить $T_{-1}=0$, $P_{-1}=0$, $f_0=f$, $f_{-1}=0$, $A_0=A$, $B_0=B$).

Далее выясняются условия разрешимости системы (I4), (I5) и показывается, что равенство $R_{k-1}(E-A_k^- A_k)=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовало число c, при котором $def(B-cA)=0$.

В § 9 вводится понятие совершенной пары матриц. Показывается, что упорядоченная пара матриц (A,B) совершенна (в смысле введенного определения) в том и только в том случае, если при всех комплексных числах α выполнено неравенство $rank\, A \geqslant rank(A-\alpha B)$, и если пара матриц (A,B) совершенна, то уравнение (8) исчезает, превращаясь в условие совместности. Кроме того, относительно совершенной пары доказывается утверждение: при некотором числе c имеет место равенство $def(B-cA)=0$, если и только если столбцы матрицы A линейно независимы.

В § I0 вводится понятие полусовершенной пары матриц. Полусовершенство упорядоченной пары матриц (A,B) равносильно тому, что нильпотентные блоки матрицы A в канонической форме пучка $A+\lambda B$ имеют порядок не выше первого. Показывается, что в случае полусовершенной пары матриц уравнение (8) упрощается, и формулируется условие существования числа c такого, что $def(B-cA)=0$.

В § II вводится в рассмотрение обратная матрица Дразина к квадратной матрице A, т.е. матрица являющаяся единственным решением системы

$$1.\ AA^D = A^D A, \qquad 2.\ A^D A A^D = A^D, \qquad 3.\ A^D A^{k+1} = A^k,$$

где k - индекс матрицы A (наименьшее из неотрицательных целых чисел, для которых $rank\, A^{k+1} = rank\, A^k$), и приводятся некоторые полезные её свойства.

В § I2 дается несколько представлений обратной матрицы Дразина: представление I° с помощью интеграла Коши, 2° с помощью скелетных разложений, 3° с помощью полуобратных матриц и 4° полиномов от матрицы.

В § I3 обсуждается приложение обратной матрицы Дразина к представлению резольвенты матрицы A.

В § I4 на основе § I3 рассматривается метод окаймления для получения обратной матрицы Дразина. Полезность этого метода иллюстрируется на примере получения нормального решения разностной задачи, аппроксимирующей одномерную задачу Неймана:

$$x''(t) = f(t), \qquad x'(0) = x'(1) = 0.$$

В § I5 вводится определение разрешающей пары матриц: пара матриц $(A^{B}, У)$, в которой $A^{B} = (УA)^{D} У$, а $У$ есть решение системы

$$(E - BУ)(AУ)^{D} = 0, \qquad (УA)^{D}(E - УB) = 0,$$

$$BУB = B,$$

называется разрешающей парой, соответствующей паре матриц (A, B).

Матрица $У$ в разрешающей паре есть некоторая полуобратная матрица к матрице B, а матрица A^{B} напоминает по своим свойствам обратную матрицу Дразина. В частности, если $B = E$, то $A^{B} = A^{D}$.

При предположении, что

I° разрешающая пара такова, что матрицы $(E - A^{B}A)УA$, $(E - BУ)A$ постоянны (если в (5) λ - дифференциальный (или разностный) оператор)

2° если λ - разностный оператор, то, сверх того, постоянна также и матрица $A^{B}A$, доказывается лемма:

Л е м м а 4. Если x есть решение уравнения (5), то пара (x, u), где $u = (E - УB)x$, удовлетворяет системе

$$\lambda(A^{B}Ax) = [A^{B}B + \lambda(A^{B}A)]A^{B}Ax + \lambda(A^{B}A)\zeta(u) + A^{B}f. \tag{I6}$$

$$(E - A^{B}A)x = \zeta(u), \tag{I7}$$

$$\lambda[(E - BУ)A\zeta(u)] = (E - BУ)f, \tag{I8}$$

$$Bu = 0, \tag{I9}$$

где

$$\zeta(u) = T^{\ell-1}[u - (E - A^{B}A)Уf]$$

при любом $\ell \geq s$ (s - индекс матрицы $УA$), а оператор T определен по формулам

$$T^{-1}\psi = 0, \qquad T^{0}\psi = \psi,$$

$$T\psi = \lambda[(УA)\psi] + u - (E - A^{B}A)Уf$$

(если λ - число, то в (I6) нужно положить $\lambda(A^{B}A) = 0$).

Обратно, если пара (x, u) является решением системы (I6) - (I9), то x удовлетворяет уравнению (5).

Формулировка леммы 4 справедлива и для уравнения (6), если предположить, что

I° матрицы ВУ и $(E - A^B A)У$ постоянны и выполнены все прежние предположения (если λ - дифференциальный оператор)

2° если λ - разностный оператор, то, сверх того, матрица A^B постоянна. При этом нужно только заменить уравнение (16) на уравнение

$$\lambda(A^B A x) = [A^B B + \lambda(A^B)A]A^B A x + \lambda(A^B)A\zeta(u) + A^B f$$

(если λ - число, то в этом уравнении $\lambda(A^B)=0$).

При предположениях, что

I° матрицы ВУ и $(E - AA^B)AУ$ постоянны (если λ - дифференциальный оператор),

2° если λ - разностный оператор, то, сверх того, постоянна матрица AA^B, справедлива

Л е м м а 5. Если x является решением уравнения (6), то пара $y = Ax$, $u = (E - УB)x$ удовлеворяет системе

$$\lambda(AA^B y) = [BA^B + \lambda(AA^B)]AA^B y + \lambda(AA^B)\zeta(u) + AA^B f, \tag{20}$$

$$(E - AA^B)y = \zeta(u), \tag{21}$$

$$\lambda[(E - BУ)\zeta(u)] = (E - BУ)f, \tag{22}$$

$$Bu = 0, \tag{23}$$

где

$$\zeta(u) = T^{\ell-1}[Au - (E - AA^B)AУf]$$

($\ell \geq k$, k - индекс матрицы АУ), а оператор Т определен по формулам

$$T^{-1}\psi = 0, \qquad T^0\psi = \psi,$$

$$T\psi = \lambda[(AУ)\psi] + Au - (E - AA^B)AУf$$

(если λ - число, то в (20) нужно положить $\lambda(AA^B) = 0$).

Если же пара (y, u) является решением системы (20)-(23), то вектор $x = У(\lambda y - f) + u$, удовлетворяет уравнению (6).

Далее показывается, что если пара матриц (В,А) совершенна, а в случае дифференциальных уравнений (5), (6) $(\lambda = d/dt)$ этого всегда можно добиться с помощью замены $x = e^{ct} y$, уравнения (I8), (22) превращаются в условия совместности.

Леммы I - 5 в диссертации являются основой для построения общих решений задач типа (I), (3) и (2), (4) и их разностных аппроксимаций. Затем, в главе 6, построенные формулы решений находят применение при разработке теории устойчивости дифференциальных и разностных уравнений типа (5).

В § I6 при предположении о совершенстве пары (B,A) изложен и обоснован алгоритм получения разрешающей пары матриц $(A^B, У)$.

Глава 2 называется "Шесть задач". В этой главе и во всем дальнейшем изложении включения $\mathcal{M} \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$, $\mathcal{M} \in \Sigma$ означают, что все элементы матрицы (вектора) $\mathcal{M}$ принадлежат соответственно множеству абсолютно непрерывных, непрерывных и суммируемых функций, определенных на отрезке $[0,I]$.

В § I сформулированы следующие задачи.

З а д а ч а I. Пусть $A \in \mathcal{H}$, $B \in \Sigma$, $f \in \Sigma$, a - заданный постоянный вектор, и существует такая полуобратная матрица A^- к матрице A, что $A^- \in \mathcal{H}$, $(E - AA^-)B \in \mathcal{H}$.

Найти вектор $x \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющий системе (I) (почти всюду на $[0,I]$) и условию (3).

З а д а ч а П. Пусть $A \in \mathcal{H}$, $B \in \Sigma$, $f \in \Sigma$, a - заданный постоянный вектор, и существует такая полуобратная матрица A^- к матрице A, что $A^- \in \mathcal{H}$.

Найти вектор $x \in \mathcal{H}$ такой, что $Ax \in \mathfrak{A}$, и который удовлетворяет системе (2) (почти всюду на $[0,I]$) и условию (3).

З а д а ч а Ш. Пусть $A \in \mathcal{H}$, $B \in \mathcal{H}$, $f \in \Sigma$, a - постоянный вектор, и существует такая полуобратная матрица A^- к матрице A, что $A^- \in \mathcal{H}$.

Найти вектор $x \in \Sigma$ такой, что $Ax \in \mathfrak{A}$, и который удовлетворяет системе (2) (почти всюду на $[0,I]$) и условию (4).

В формулировках следующих трех задач используются определения:

О п р е д е л е н и е I. Будем говорить, что пара матриц $(A(t), B(t))$, определенных на отрезке $[0,I]$, обладает на этом отрезке л е в ы м с в о й с т в о м Ω, если

I° при каждом фиксированном $t \in [0,I]$ пара матриц $(B(t), A(t))$

является совершенной, 2° для пары матриц $(A(t), B(t))$ существует такая разрешающая пара $(A^B(t), Y(t))$, что матрицы $(E-A^BA)YA$ и $(E-BY)A$ постоянны и выполнены включения:

$$A\in\mathfrak{N},\quad B\in\Sigma,\quad A^B\in\mathfrak{N},\quad A^BA\in\mathfrak{A},$$
$$(E-A^BA)Y\in\mathfrak{N},\quad BY\in\mathfrak{N},\quad YB\in\Sigma$$

Определение 2. Будем говорить, что пара матриц $(A(t), B(t))$, определенных на $[0,1]$, обладает на этом отрезке правым свойством Ω, если 1° при каждом фиксированном $t\in[0,1]$ пара матриц $(B(t), A(t))$ совершенна, 2° для пары матриц $(A(t), B(t))$ существует такая разрешающая пара $(A^B(t), Y(t))$, что матрицы $(E-AA^B)AY$ и BY постоянны и выполнены включения: $A\in\mathfrak{N}$, $B\in\mathfrak{N}$, $Y\in\mathfrak{N}$, $AA^B\in\mathfrak{A}$.

Определение 3. Будем говорить, что пара матриц $(A(t), B(t))$, определенных на $[0,1]$, обладает на этом отрезке свойством Ω, если она обладает на этом отрезке левым свойством Ω, причем вместо включений $A\in\mathfrak{N}$, $A^B\in\mathfrak{N}$, $(E-A^BA)Y\in\mathfrak{N}$, $BY\in\mathfrak{N}$ выполнены более сильные требования: $A\in\mathfrak{A}$, $A^B\in\mathfrak{A}$, а матрицы $(E-A^BA)Y$ и BY постоянны.

Следующие три задачи формулируются так:

Задача IУ. Пусть $f\in\Sigma$, a - постоянный вектор, и пара матриц (A,B) на отрезке $[0,1]$ обладает левым свойством Ω.

Найти вектор $x\in\mathfrak{A}$, удовлетворяющий системе (1) (почти всюду на $[0,1]$) и условию (3).

Задача У. Пусть $f\in\Sigma$, a - постоянный вектор, и пара матриц (A,B) на отрезке $[0,1]$ обладает свойством Ω.

Найти вектор $x\in\mathfrak{A}$, удовлетворяющий системе (2) (почти всюду на $[0,1]$) и условию (3).

Задача УI. Пусть $f\in\Sigma$, a - постоянный вектор, и пара матриц (A,B) на отрезке $[0,1]$ обладает правым свойством Ω.

Найти вектор $x\in\Sigma$ такой, что $Ax\in\mathfrak{A}$, и который удовлетворяет системе (2) (почти всюду на $[0,1]$) и условию (4).

В § 2 описывается достаточно широкий класс пар матриц, обладающих теми или иными свойствами Ω. В частности, совершенные пары постоянных матриц обладают всеми тремя свойствами Ω.

В § 3 формулируются разностные аналоги задач I - УI (задачи I_1 - $УI_1$) и определений свойств $\mathcal{R}$.

Глава 3 называется "Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и совершенные тройки матриц. Она посвящена решению задач I, П, Ш и их разностных аналогов I_1, $П_1$, $Ш_1$.

В § I выводятся известные соотношения между значениями решения системы первого порядка, разрешенной относительно производных, строятся разностные аналоги этих соотношений для случая, когда разностный оператор λ определяется по формуле $\lambda a_i = (a_i - a_{i-1})/h$. Эти соотношения в следующих главах используются при построении решений задач I -УI и I_1 - $УI_1$.

Приводятся также формулы В.С.Рябенького для случая, когда матрицы А и В постоянны, а разностный оператор λ многоточечный.

В § 2 на основании леммы I и результатов предыдущего параграфа строится общее решение задачи I и доказываются теоремы о существовании и единственности решений. Отмечается, что аналогичные результаты справедливы и относительно неявной разностной схемы Эйлера.

Для случая постоянных матриц А и В построение общего решения задачи I проводится также с помощью леммы 3 и формулируются другие формы теорем о существовании и единственности решений.

Далее замечается, что если λ- разностный оператор, то лемма 3 справедлива, вообще говоря, только для уравнения (5) без присоединённого к нему условия типа (3) : при наличии условия (3) уравнения (I4), (I5) в определённом числе приграничных точек отрезка [0,I] оказываются не определёнными. Однако если $\lambda a_i = (a_i - a_{i-1})/h$, а правый индекс пары матриц (A,B) равен единице, то всё обстоит благополучно, и для этого случая даётся общее решение разностной задачи I_1, а также формулируются теоремы существования и единственности решений.

В §§ 3 - 4 приводятся решения задач II,III. При этом используется лемма 2.

В § 5 вводятся следующие определения.

Определение 4. Упорядоченная тройка матриц $(A(t), B(t), C(t))$, удовлетворяющих включениям $A \in \mathcal{H}$, $B \in \mathcal{H}$, $C \in \mathcal{H}$, называется совершенной справа, если существуют полуобратная матрица $A^{-}\in\mathfrak{N}$ и некоторая матрица $C_1\in\mathfrak{N}$, такие, что имеют место тождества

$$(E-A(t)A^{-}(t))X_1(t)X^{-}(s)B(s)[E-A^{-}(s)A(s)]\equiv 0, \tag{24}$$

$$C(t)=C_1(t)A(t), \qquad 0\le t,\ s\le 1, \tag{25}$$

$$C_1(t)X_1(t)X_1^{-1}(s)B(s)[E-A^{-}(s)A(s)]\equiv 0, \tag{26}$$

где $X_1(t)$ является решением задачи

$$X_1'(t)=B(t)A^{-}(t)X_1(t),$$
$$X_1(0)=E$$

О п р е д е л е н и е 5. Упорядоченная тройка матриц $(A(t), B(t), C(t))$, в которой $A\in\mathfrak{N}, B\in\mathfrak{N}, C\in\mathfrak{N}$, называется с о в е р ш е н н о й с л е в а, если существует полуобратная матрица $A^{-}\in\mathfrak{N}$ такая, что выполнены тождества

$$[E-A(t)A^{-}(t)]B(t)X_2(t)X_2^{-1}(s)[E-A^{-}(s)A(s)]\equiv 0, \tag{27}$$

$$C(t)X_2(t)X_2^{-1}(s)[E-A^{-}(s)A(s)]\equiv 0, \tag{28}$$

где $X_2(t)$ является решением задачи

$$X_2'(t)=A^{-}(t)B(t)X_2(t), \quad X_2(0)=E$$

В случае постоянных матриц A и B тождества (24) и (27) означают совершенство пары матриц (A,B) в смысле определения, данного в § 9 главы I.

Роль совершенных троек матриц слева (справа) состоит в том, что при совершенной слева (справа) тройке матриц (A,B,C) вектор u из (7) - (9) (соответственно из (I0) - (I2)) не связывается условием (3), а также уравнением (8) (соответственно (II)), а это приводит к явным формулам решения и явным условиям совместности задач I, II.

После введения определений 4 и 5 доказывается их независимость от конкретного выбора полуобратной матрицы $A^{-}\in\mathfrak{N}$ и дается описание широкого класса совершенных слева (справа) троек матриц (A,B,C). Выясняются также условия, при которых из совершенства слева тройки матриц (A,B,0) следует её совершенство справа и наоборот.

В § 6 даются определения полусовершенных справа, слева переменных пар матриц $(A(t), B(t))$. Эти определения являются обобщением определения, сформулированного в §10 главы I. Понятия полусовершенных пар матриц в диссертации не используются. Применение этих понятий дано в Дополнении к монографии [I].

Г л а в а 4 называется "Системы линейных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений и свойство Ω ". В ней решаются задачи IУ - УI и разностная задача $IУ_1$.

В § I на основании леммы 4 строится решение задачи IУ, а также формулируются и доказываются теоремы о существовании и единственности решений этой задачи.

В §§ 2 и 3 аналогичные результаты получаются относительно задач У и УI.

В § 4 речь идет о разностных задачах $IУ_1$ - $УI_1$. Здесь отмечается, что метод, примененный в предыдущих параграфах, в случае разностных задач $IУ_1$ - $УI_1$ дает решение только тогда, когда индекс соответствующей матрицы АУ или УА не больше единицы, и даются формулы общего решения задачи IУ в случае, когда $\lambda x_i = (x_i - x_{i-1})/h$.

Г л а в а 5 называется "Регулярные системы".

В § I вводятся определения регулярной, регулярной с л е в а, регулярной с п р а в а пары переменных матриц, определенных на отрезке [0,I].

Согласно этим определениям, пара квадратных матриц $(A(t), B(t))$ регулярна (регулярна с л е в а, регулярна с п р а в а), если существует такое комплексное число c , при котором матрица $B_c(t) = B(t) - cA(t)$ при всех $t \in [0,I]$ является неособенной, а пара матриц $(A(t), B(t))$ обладает свойством Ω (л е в ы м, п р а в ы м).

Введенные определения являются обобщениями (на случай переменных матриц) известного определения регулярной пары постоянных матриц, в котором для регулярности пары матриц требуется лишь наличие числа c , обеспечивающего справедливость неравенства $\det(B - cA) \neq 0$.

Далее замечается, что если пара матриц в системах (I), (2) обладает каким-нибудь свойством регулярности, то соответствующие задачи IУ-УI путём замены $x = e^{ct} y$ могут быть сведены к задачам IУ-УI с неособенной матрицей $B(t)$. В связи с этим в §§ 2-4, 6,7 неособенность матрицы $B(t)$ при расомотрении задач IУ-УI и IУ,-УI, предполагается.

В § 2 на основании результатов главы 4 выписывается общее решение задачи IУ в случае регулярной с л е в а пары матриц (A,B) и формулируются теоремы о существовании и единственности решений. Общее решение (если оно существует) имеет вид

$$
\begin{aligned}
x(t) = {} & A^{B}(t) A(t) X(t) X^{-1}(t_0)\, x(t_0) + \\
& + A^{B}(t) A(t) \int_{t_0}^{t} X(t) X^{-1}(\tau) \Big[\frac{d A^{B} A}{d\tau} \zeta(\tau) + \\
& + A^{B}(\tau) f(\tau) \Big] d\tau + \zeta(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t_0) = {} & A^{B}(t_0) A(t_0) X(t_0) \Gamma^{-} \cdot \\
& \cdot \big[a + \varphi(t_0) + \psi \big] + \zeta(t_0) + c,
\end{aligned}
$$

где t_0 - произвольная точка отрезка $[0,1]$, матрица $X(t)$ есть решение задачи

$$
X'(t) = \Big[A^{B}(t) B(t) - \frac{d A^{B} A}{dt} \Big] X(t),
$$

$$
X(0) = E,
$$

вектор $\zeta(t)$ получается по формуле

$$
\zeta(t) = T^{s-1} \Big\{ - \big[E - A^{B}(t) A(t) \big] B^{-1}(t) f(t) \Big\},
$$

где s - индекс матрицы УА (он не зависит от t !), а оператор T определён так:

$$
T^{-1} \xi = 0, \qquad T^{0} \xi = \xi,
$$

$$T\xi = \left[(YA)\xi\right]' - (E - A^{B}A)B^{-1}f.$$

9

Вектор C есть произвольное решение системы

$$\left[E - A^{B}(t_0)A(t_0)\right]C = 0, \qquad \Gamma X^{-1}(t_0)C = 0. \tag{29}$$

Кроме того,

$$\Gamma = \int_0^1 \left[d\,\delta(s)\right]C(s)A^{B}(s)A(s)X(s),$$

$$\varphi(t) = \int_0^1 \left[d\,\delta(s)\right]C(s)A^{B}(s)A(s)X(s)\,\Phi(s,t), \tag{30}$$

$$\Phi(s,t) = \int_s^t X^{-1}(\tau)\left[\frac{dA^{B}A}{d\tau}\,\zeta(\tau) + A^{B}(\tau)f(\tau)\right]d\tau, \tag{31}$$

$$\psi = \int_0^1 \left[d\,\delta(s)\right]C(s)\,\zeta(s).$$

Если пара матриц (А,В) регулярна слева, то решение задачи IУ существует в том и только в том случае, если $\zeta(t) \in \mathfrak{N}$ и выполнено равенство

$$(E - \Gamma\Gamma^{-})\left[a + \varphi(t_0) + \psi\right] = 0.$$

Для единственности решения необходимо и достатачно, чтобы система (29) имела только нулевое решение.

В § 3 показывается, как получить аналогичные результаты относительно задачи У. Кроме того, замечается, что поскольку $(E - A^{B}A)x = \zeta$, вектор $(E - A^{B}A)x$ однозначно определяется через правую часть решаемой системы и поэтому дополнительных условий, которым он должен удовлетворять не требуется. Что касается вектора $A^{B}Ax$, то для однозначного его определения дополнительные условия типа (3) требуются и они должны быть заданы. В связи с этим предлагается считать условие (3) в задаче IУ - У тогда е с т е с т в е н н ы м, когда $\psi = 0$ и вектор ζ в (30),(31) аннулируется. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда матрица $C(s)$ в (3) имеет представление $C(s) = D(s)A^{B}(s)A(s)$, где

$\mathcal{D}(s)$ удовлетворяет тождеству

$$\mathcal{D}(s)\,X(s)\,X^{-1}(\tau)\,A^{B}(\tau)\,A(\tau)\,\frac{dA^{B}A}{d\tau} \equiv 0, \qquad 0 \le s, t \le 1$$

В § 4 относительно задачи УI приводятся результаты, аналогичные результатам §2.

В § 5 отмечается, что если матрицы А и В постоянны, а пара матриц (А,В) регулярна, то задача IУ может быть решена как задача I с помощью результатов § 2 главы 3 и леммы 3. При этом предварительной подстановки $x = e^{ct} y$ не требуется. Далее приводятся формулы общего решения и теоремы о существовании и единственности.

В § 6 при предположении, что пара матриц (А,В) регулярна с л е в а , а задача IУ имеет единственное решение, выводится оценка нормы решения задачи IУ и выписываются аналогичные оценки относительно задач У, УI и I. Далее формулируется теорема о непрерывной зависимости решения задачи IУ от правых частей f и a. Замечается, что условия непрерывной зависимости для систем типа (I), (2) являются более жесткими, чем аналогичные условия для систем, разрешенных относительно производных.

В § 7 обсуждаются вопросы, связанные с возможностями распространения полученных результатов на разностные уравнения.

Прежде всего отмечается что леммы 4,5 справедливы также для разностных уравнений, у которых пара матриц (A_i, B_i) как сеточная функция, обладает соответствующим свойством Ω , и формулируется лемма 4 для случая, когда матрица B_i в разностном уравнении типа (5) неособенна. Эта лемма справедлива лишь в том случае, если разностное уравнение определено во всех точках $i = 0, \pm I, \pm 2, \ldots$, и для решения разностной задачи с условием (3) она, вообще говоря, не годится (исключением являются системы, у которых индекс s матрицы $B_i^{-1} A_i$ не больше единицы). Чтобы исправить положение в случае $s > 1$, вместо уравнения (I7) выписывается другое уравнение, после чего лемма 4 оказывается применимой и для решения задач с условиями.

Далее подробно исследуются свойства решений задачи Коши в том случае, когда $\lambda x_i = (x_i - x_{i-1})/h$. При этом показывается, что если x_0 задано и $i = 0, I, \ldots,$, то при $i < s$, где s - индекс матрицы $B_i^{-1} A_i$, решение разностной задачи может отличаться на величину порядка $O(1/h^{s-1})$. Чтобы пояснить источник возникновения этих ошибок, разбираются три примера.

Что касается точек с номерами $i \geq s$, то в них наблюдается сходимость со скоростью $O(h)$.

Далее описывается путь уничтожения ошибок порядка $O(1/h^{s-1})$, возникающих в точках $i < s$: для этого достаточно пересчитать задачу (по несколько измененной схеме, указанной в диссертации) в обратном направлении: от $i = N$ до $i = 0$, беря в качестве начального данного x_N то, что получилось при прямом счете.

Глава 6 называется "Теория устойчивости вырожденных дифференциальных и разностных систем". В этой главе на основании несколько видоизмененного энергетического тождества А.А.Самарского, метода А.М.Ляпунова и результатов, изложенных в предыдущих главах, строятся основы теории устойчивости систем линейных дифференциальных и аппроксимирующих их разностных уравнений с вырожденной или прямоугольной матрицей при производных.

В § I выводится обобщение энергетического тождества А.А.Самарского на случай разностных систем вида $Ax_t = Bx + f$ с прямоугольными матрицами и для полученного тождества приводится дифференциальный аналог. Затем доказываются две теоремы, представляющие основу для формулирования различных достаточных признаков устойчивости линейных комбинаций компонент решений систем дифференциальных

$$A\dot{x} = Bx + f \tag{32}$$

и разностных

$$Ax_t = Bx + f \tag{33}$$

уравнений.

В § 2 даются оценки решений регулярных слева дифференциальных и аппроксимирующих их разностных уравнений соответственно вида

$$A\dot{x} = y \tag{34}$$

и

$$\left[A - \tau\psi(\tau A)\right] x_t = y, \tag{35}$$

где $\Psi(\tau A)$- функция от матрицы τA, причем такая, что для всех τ из некоторого промежутка $0<\tau\leq\tau_0$ матрицы $A_i - \tau\Psi(\tau A_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, где i- номер точки сетки, неособенны. При этом указывается, что регулярную слева систему общего вида $A\dot{x} = Bx$ подстановкой $x = e^{ct}y$ можно привести к системе, имеющей вид (34).

Основные результаты этого параграфа можно сформулировать так:

Теорема 1. Если $CA^{D}A = C$ и матрица $C^{*}C$ постоянна, то для того чтобы все решения уравнения (34) удовлетворяли неравенству $\|C(t)\,x(t)\| \leq \|C(s)\,x(s)\|$ (при $t\geq s$), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение

$$A^{*}C^{*}C + C^{*}CA \leq 0 \tag{36}$$

(здесь $\|\ \|$ - норма в соответствующем унитарном пространстве).

Теорема 2. Если матрица $C^{*}C$ постоянна и при всех $0<\tau\leq\tau_0$ матрицы $A-\tau\Psi(\tau A)$, $A-\tau\Psi(\tau A)+\tau E$ неособенны, то для того чтобы все решения разностного уравнения (35) при $k\geq s$ удовлетворяли оценке $\|C_k x_k\| \leq \|C_s x_s\|$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы A, C и функция $\Psi(\tau A)$ были таковы, что при всех $0<\tau\leq\tau_0$ было выполнено неравенство

$$\begin{gathered}[A^{*} - \tau\Psi^{*}(\tau A) + 0{,}5E]\,C^{*}C + \\ + C^{*}C\,[A - \tau\Psi(\tau A) + 0{,}5E] \leq 0\end{gathered} \tag{37}$$

(для достаточности условия предполагаемой неособенности матриц не требуется).

Теорема 3. Для того чтобы все отличные от нуля собственные числа матрицы A имели отрицательную вещественную часть, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$A^{*}Y + YA = -(A^{D}A)^{*}A^{D}A$$

имело решение Y, являющееся эрмитовой матрицей, положительно определенной на образе матрицы $A^{D}A$.

Теоремы 1,2 получаются из энергетических тождеств, выведенных в § 1, с учетом формулы общего решения регулярной слева системы (34). Теорема 3 является обобщением известной теоремы А.М.Ляпунова на случай вырожденных матриц.

В этом параграфе отмечается также, что сравнение неравенств (36), (37) позволяет усмотреть возможность сведения исследования устойчивости разностных уравнений к исследованию устойчивости уравнений дифференциальных, что находится в согласии с известными работами Н.Н.Яненко и Ю.И.Шокина о дифференциальных приближениях разностных схем.

В § 3 результаты предыдущего параграфа и формулы общих решений регулярных слева систем применяются для оценки решений неоднородных уравнений

$$A\dot{x} = x + f \tag{38}$$

и

$$\left[A - \tau\Psi(\tau A)\right] x_t = x + \varphi \tag{39}$$

Затем рассматривается ряд примеров, имеющих не только иллюстративное, но и практически важное самостоятельное значение, а именно: I° выясняются условия сходимости при $h \to 0$ метода возмущения, состоящего в переходе от уравнения (38) к уравнению $(A - hE)\dot{x}_h = x_h + f$ с невырожденной матрицей при производных $(h > 0)$, 2° решается аналогичный вопрос относительно неявной разностной схемы (39), в которой $\Psi \equiv 1$, $A = A_{i+1}$, $\varphi = f_{i+1}$, 3° с точки зрения устойчивости рассматривается образ Фурье системы уравнений фильтрации вязкой несжимаемой жидкости и неявная разностная аппроксимация, 4° изучается образ Фурье неявной разностной схемы, аппроксимирующей двумерную систему уравнений Стокса вязкой несжимаемой жидкости, показывается отрицательная роль индекса матрицы системы, равного двум, выясняются условия сходимости, 5° с точки зрения устойчивости и естественности краевых условий рассматривается P_2 - приближение системы сферических гармоник, аппроксимирующего уравнение переноса нейтронов в плоско-параллельном случае.

В § 4 описывается способ сведения задачи о наблюдаемости системы $\dot{x} = Ax$, $Cx = 0$, $0 \le t < \infty$ (о единственности её нулевого решения) к задаче об устойчивости.

В § 5 делается замечание о том, что если пара матриц в системе (32) обладает левым свойством Ω, то поскольку в этом случае её можно свести к виду (38) и выписать явную формулу для её общего решения, к системе (32) применимы результаты

§§ 2,3. Кроме того, отмечается, что теоремы, вытекающие из энергетического тождества, допускают непосредственное применение к исследованию норм решений системы $A\dot{x} = Bx + f$, в которой матрицы, вообще говоря, прямоугольные.

В Заключении говорится о том, что результаты диссертации дают прочную основу для разработки теории устойчивости разностных схем для решения сингулярных систем о.д.у.

Сформулируем теперь в краткой форме выносимые на защиту Основные выводы из диссертации и новые результаты.

I. С помощью различных обобщенных обратных матриц, а также с помощью введенной в диссертации разрешающей пары матриц (A^B, Y), соответствующей паре матриц (A, B), сформулировано и решено шесть задач как в дифференциальной (задачи I -УI), так и(частично) в разностной постановках (задачи I_1 - $УI_1$). При этом введено несколько новых понятий, использование которых позволило из всего множества систем типа (I), (2) с условиями (3), (4) выделить широкий класс систем, допускающих явное решение и явную запись условий существования и единственности решений. Таким образом, построен новый, весьма общий и конструктивный аппарат для решения, исследования и построения основ теории устойчивости неразрешенных относительно производных систем линейных о.д.у. и их разностных аппроксимаций.

Список новых понятий таков:

I^o вполне совершенные пары матриц,

2^o совершенные с л е в а пары и тройки матриц,

3^o совершенные с п р а в а пары и тройки матриц,

4^o полусовершенные с л е в а пары матриц,

5^o полусовершенные с п р а в а пары матриц,

6^o л е в о е свойство Ω пары матриц,

7^o п р а в о е свойство Ω пары матриц,

8^o свойство Ω пары матриц (определение свойств 6^o - 8^o дано также и относительно сеточных пар матриц),

9^o регулярные с л е в а пары матриц,

$I0^o$ регулярные с п р а в а пары матриц,

II^o регулярные пары матриц,

$I2^o$ разрешающая пара матриц (A^B, Y), соответствующая паре матриц (A,B). Это понятие в соединении с понятием совершенной пары матриц использовалось при формулировке понятий 6°- 11°.

Роль понятий 1°- 12° в автореферате пояснена.

2. Для обратной матрицы Дразина, используемой при определении разрешающей пары матриц, найдено и обосновано ее представление с помощью скелетных разложений матриц. Это представление при небольших порядках матриц позволяет обратную матрицу Дразина практически находить.

3. Построен и обоснован алгоритм построения разрешающей пары матриц $(A^{B}, У)$, при необходимости разрешающая пара может быть найдена, но для диссертации это не имеет значения.

4. Получен и обоснован алгоритм сведения системы (I) с произвольной постоянной парой матриц (A,B) к эквивалентной системе, пара матриц (A_k, B_k) которой вполне совершенна (см. лемму 3). Показано, что этот алгоритм приведет к результату при любом выборе конкретных полуобратных матриц, участвующих при построении A_k, B_k.

5. Доказано, что определения совершенных с л е в а и с п р а в а троек переменных матриц не зависят от конкретного выбора полуобратной матрицы A^-, участвующей в этих определениях, и даны признаки совершенства тройки матриц.

6. На основании лемм I,2 сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности решений задач I - Ш и выписаны формулы их общих решений. Показано, что в случае совершенной (слева или справа) тройки матриц (A,B,C) общие решения, условия существования и единственности приобретают явный вид.

7. На основании леммы 3 решена задача I в случае постоянных матриц A и B: приведены формулы ее общего решения и сформулированы теоремы о существовании и единственности решений. В случае, когда правый индекс пары матриц (A,B) равен единице, аналогичные формулы и теоремы приведены и для разностной задачи I_1, в которой $\lambda x_i = (x_i - x_{i-1})/h$. Если в постановке разностной задачи I_1, какие-либо дополнительные условия отсутствуют, то аналогичные результаты на основании леммы 3 могут быть сформулированы при произвольном правом индексе пары матриц (A,B).

8. На основании лемм 4,5 сформулированы и доказаны теоремы

о существовании и единственности решений, а также построены общие решения задач IУ - УI. В регулярном случае формулы общего решения задачи IУ показаны в автореферате. В случае, когда индекс матрицы УА не больше единицы, аналогичные формулы и теоремы сформулированы относительно разностной задачи $IУ_1$.

9. Сформулирован и обоснован ряд признаков существования числа c, при котором $det(B-cA)=0$. Эти признаки полезны при установлении регулярности пары матриц (A,B).

10. Введены достаточно конструктивные определения регулярной (регулярной с л е в а , с п р а в а) пары переменных матриц. Эти определения являются обобщением известного определения регулярной пары постоянных матриц.

11. Дано описание довольно широкого класса пар матриц, обладающих свойствами Ω, а тем самым и пар матриц, удовлетворяющих свойствам регулярности.

12. Результаты, описанные в п.п.7,8, сформулированы также для случая регулярных пар матриц, когда эти результаты приобретают наиболее завершенную и красивую форму.

13. Показано, что применение лемм 3 - 5 в случае разностных задач I_1, $IУ_1$ - $УI_1$ вызывает затруднения. В связи с этим вводится видоизмененный вариант леммы 4 и анализируется поведение решения разностной задачи Коши IУ с оператором λ, определенным по формуле $\lambda x_i=(x_i-x_{i-1})/h$. Показывается, что вблизи начальной точки возможны ошибки, стремящиеся при $h\to 0$ к бесконечности, и указывается способ их устранения.

14. Дано обобщение энергетического тождества А.А.Самарского на случай систем линейных о. д. у. с прямоугольными матрицами коэффициентов, а также обобщение теоремы А.М.Ляпунова об устойчивости матрицы на случай вырожденных матриц. На основании этих обобщений, а также полученных в диссертации формул общих решений, построены основы теории устойчивости вырожденных дифференциальных систем линейных о.д.у. и их разностных аппроксимаций.

15. Получены условия сходимости метода возмущения и неявной разностной схемы для решения регулярных вырожденных систем.

16. Проанализирован образ Фурье неявной схемы, аппроксимиру-

ющей систему уравнений Стокса, и с помощью результатов диссертации вскрыты причины нарушения аппроксимации в окрестности начальных данных.

I7. С точки зрения естественности и устойчивости граничных условий проанализировано P_2 -приближение системы сферических гармоник в плоско-параллельном случае.

I8. Показано, что задача о наблюдаемости системы сводится к задаче об устойчивости, и, тем самым, создана предпосылка для машинной проверки наблюдаемости.

На защиту выносится изложенная в диссертации теория разностных и дифференциальных линейных систем с вырожденными, а также прямоугольными, матрицами коэффициентов и построенная на ее основе теория устойчивости разностных схем.

* *

*

Основные результаты диссертации опубликованы в монографии:

I. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск, Наука, I980 г. - 222с. - В надзаг.: АН СССР СО СЭИ и в статьях:

2. Бояринцев Ю.Е. О разрешимости краевых задач для систем обыкновенных разностных уравнений. - В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения, вып.2. - Иркутск, I973 г. - с. 4-8 В надзаг.: МВ и ССО РСФСР ИГУ им. А.А.Жданова.

3. Бояринцев Ю.Е. К теории краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - В кн.: Методы оптимизации и исследование операций (прикладная математика). - Иркутск, I976 г. - с. 89-I04 - В надзаг.: АН СССР СЭИ.

4. Бояринцев Ю.Е. Об общих решениях краевых задач для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, I977, т.8, № 7 - с. I2-2I - В надзаг.: АН СССР СО ВЦ и ИТПМ.

5. Бояринцев Ю.Е. О структуре общего решения краевой задачи для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных урав-

ний. - Препринт семинара "Методы вычислительной и прикладной математики" под руководством академика Г.И.Марчука, вып.44. - Новосибирск, 1978. - 11с. - В надзаг.: АН СССР СО ВЦ.

6. Бояринцев Ю.Е. Модульный анализ вычислительного алгоритма решения краевых задач для линейных сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - В кн.: Комплексы программ математической физики (материалы У Всесоюзного семинара по комплексам программ математической физики). - Новосибирск, 1978. - с. 3-14 - В надзаг.: АН СССР ИТПМ.

7. Бояринцев Ю.Е. Сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и численные методы их решения. - В кн.: Прикладная математика. - Новосибирск, Наука, 1978. - с. 72 - 108 - В надзаг.: АН СССР СО СЭИ.

8. Бояринцев Ю.Е. Об одном представлении обратной матрицы Дразина. - Иркутск, 1978. - с.176-179 - В надзаг.: АН СССР СО СЭИ.

9. Бояринцев Ю.Е. К теории систем с прямоугольными матрицами коэффициентов. - В кн.: Численные методы оптимизации и их приложения. - Иркутск, 1981. - с.106-117 - В надзаг.:АН СССР СО СЭИ.

10. Бояринцев Ю.Е. Разрешающая пара матриц. - В кн.: Приближенные методы решения операторных уравнений и их приложения. - Иркутск, 1982. - с.35-47 - В надзаг.: АН СССР СО СЭИ.

11. Бояринцев Ю.Е. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных. - В кн.: Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск, Наука, 1982. - с.5-19 - В надзаг.: АН СССР СО Иркутский ВЦ.

12. Бояринцев Ю.Е. Разрешающая пара матриц и ее приложения. - В кн.: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, Наука, 1983. - В надзаг.: АН СССР СО ВЦ (темплан II кв. 1983.).

Бояринцев

Ответственный за выпуск Бояринцев Ю.Е.

Подписано в печать 18.07.83г. МН 17646

Формат бумаги 60 84/16, Усл.печ.л. 1,94, Уч.изд.л. 2,02

Заказ № 363 Тираж 100 экз.

Отпечатано на ротапринте ВЦ СО АН СССР, Новосибирск-90, 630090, пр. академика М.А.Лаврентьева, 6.