АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

БЕЛОВ Юрий Яковлевич

АППРОКСИМАЦИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения
и математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск, 1982

ом государственном университете.

наук, профессор Т.И.Зеленяк,
наук, профессор В.Н.Монахов,
наук, профессор П.Е.Соболевский.

Ленина математический институт

Защита состоится "____" ______________ 1982 г. в ____ часов на заседании Специализированного совета Д002.10.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Вычислительном центре СО АН СССР по адресу: 630090, г.Новосибирск-90, проспект академика М.А.Лаврентьева, 6, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Вычислительного центра СО АН СССР.

Автореферат разослан "____" ______________ 1982 г.

Ученый секретарь Специализированного совета
кандидат физико-математических наук С.И. Кабанихин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Целью диссертации является исследование корректности краевых задач для дифференциальных и дифференциально-операторных систем уравнений составного типа; построение корректных удобных для численного счета аппроксимирующих задач и исследование сходимости их решений к решениям аппроксимируемых задач; исследование корректности краевых задач для квазилинейных параболических систем и систем уравнений в частных производных первого порядка, изучение устойчивости стационарных решений.

Актуальность проблемы исследований определяется необходимостью изучения краевых задач для систем дифференциальных уравнений составного типа, встречающихся, как правило, в механике сплошной среды, создания эффективных численных методов их решения. Важное значение имеют исследования новых классов нелинейных уравнений, находящих все более широкую область приложений к техническим задачам. Результаты диссертации получены при выполнении планов научно-исследовательских работ Красноярского государственного университета по теме "Методы решения уравнений механики сплошной среды" (номер государственной регистрации 79055754).

Научная новизна и практическая ценность. В диссертации развит общий подход к исследованию корректности краевых задач для систем уравнений составного типа на основании свойств аппроксимирующих, как правило, хорошо изученных краевых задач, содержащих малые параметры. Для широкого класса линейных систем уравнений составного типа первого и второго порядков по времени с неограниченным оператором доказана корректность задачи Коши и изучены вопросы аппроксимации ее решений решениями соответствующих задач для аппроксимирующих систем. Изучен новый класс нелинейных псевдопараболических уравнений и систем составного типа, содержащих псевдопараболические уравнения. Исследованы распадающиеся квазилинейные параболические системы и системы уравнений в частных производных первого порядка, не удовлетворяющие условиям типа Осгуда. Полученные в диссертации результаты по аппроксимации и корректности краевых задач для систем уравнений составного типа используются при построении эффективных численных алгоритмов решения краевых задач теории упругости, динамики жидкости, теории фильтрации многофазных жидкостей. В частности, являются первым строгим обоснованием ряда существующих математических квазилинейных моделей динамики океана. Изученный класс нелинейностей в параболических системах и системах уравнений в частных производных первого порядка играет важную роль в газовой динамике, задачах теплопроводности, химической технологии, теории горения.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на:

I) семинарах Красноярского государственного университета,

2) семинаре Института физики Красноярского филиала СО АН СССР,

3) семинарах Вычислительного центра Красноярского филиала СО АН СССР,

4) семинарах Новосибирского государственного университета,

5) семинарах Воронежского государственного университета,

6) семинарах Вычислительного центра СО АН СССР,

7) семинарах Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР,

8) семинарах Института гидродинамики СО АН СССР,

9) семинарах Института математики СО АН СССР,

I0) Всесоюзных конференциях по дифференциальным уравнениям,

II) Всесоюзных школах по качественной теории уравнений гидродинамики,

I2) Всесоюзной школе по неклассическим уравнениям,

I3) семинарах ВЦ СО АН СССР - ИРИА Франция,

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах I - 25

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав. Работа содержит 290 страниц машинописного текста, список литературы - I55 названий (всего 307 страниц).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Вопросы корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, их аппроксимация корректными, как правило, хорошо изученными задачами являются одной из важнейших областей теории дифференциальных уравнений и имеют большое число приложений. Многие задачи механики сплошной среды описываются системами уравнений в частных производных смешанного и составного типов, при изучении которых применяются их аппроксимации, зависящие от малых параметров. Класс задач, для решения которых тем или иным образом применяются аппроксимации, содержащие малые параметры, велик. Отметим два из основных и взаимосвязанных вопроса: аппроксимацию в целях доказательства корректности краевых задач и аппроксимацию исходных задач в целях построения более эффективных численных алгоритмов. В диссертации указанные вопросы исследуются для некоторых классов систем уравнений в частных производных и дифференциально-операторных уравнений, имеющих многочисленные приложения в задачах механики сплошной среды.

Систему дифференциальных операторных уравнений первого (второго) порядка по времени

$$\hat{u}' + \mathcal{L}(u) = f \qquad (\hat{u}'' + \mathcal{L}(u) = f), \quad (I)$$

где $u = \{u_1, u_2\}$ - неизвестный, $f = \{f_1, f_2\}$ - заданный векторы, $\hat{u} = \{u_1, 0\}$, $\mathcal{L}(u) = \{\mathcal{L}_1(u), \mathcal{L}_2(u)\}$, $\mathcal{L}_i(u)$ - некоторые операторы, будем называть полуэволюционной в отличие от эволюционной системы

$$u' + \mathcal{L}(u) = f \qquad (u'' + \mathcal{L}(u) = f).$$

В случае линейных обыкновенных дифференциальных уравнений задача Коши для системы уравнений

$$u_1' + \mathcal{L}_1(u) = f, \quad \varepsilon u_2' + \mathcal{L}_2(u) = f_2,$$

вырождающихся при $\varepsilon = 0$ в полуэволюционные системы вида (I), исследовалась И.С.Градштейном. Общий нелинейный случай впервые изучен в классических работах А.Н.Тихонова, давших толчок большому числу исследований по уравнениям, содержащим малый параметр. Различные краевые задачи для линейных эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных впервые изучались в работах В. Вазова, Н.Левинсона, О.А.Олейник, О.А.Ладыженской, М.И.Вишика и Л.А.Люстерника.

Задача об аппроксимации полуэволюционных систем эволюционными возникла при численных расчетах различных задач течения вязкой несжимаемой жидкости (Н.Н.Владимирова, Б.Г.Кузнецов, Н.Н.Яненко). Теоретическое обоснование различных способов эволюционной аппроксимации дано в работах Ж.Л.Лионса, Р.Темама, А.П.Осколкова, Б.Г. Кузнецова, Ш.Смагулова. В линейном случае эти вопросы для уравнений Навье-Стокса и фильтрации двухфазной жидкости рассмотрены в работах автора и А.Н.Коновалова. Другие аппроксимации изучали К.К.Головкин, О.А.Ладыженская, П.Е.Соболевский, В.В.Васильев.

Первая глава диссертации посвящена исследованию систем дифференциальных операторных уравнений составного типа и, в частности, полуэволюционных систем вида (I) с неограниченным оператором $\mathcal{L}$.

Пусть V , H - действительные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что V плотно вложено в H и вложение непрерывно, т.е. $\|x\|_H \leq \|x\|_V \quad \forall x \in V$.

В первом параграфе на отрезке $[0,T]$, $T>0$ - произвольное фиксированное число, рассматривается задача Коши

$$
\begin{aligned}
&u_1' + A_{11}u_1 + A_{12}u_2 = f_1, \\
&\varepsilon u_2' + A_{21}u_1 + A_{22}u_2 = f_2, \quad (0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon = const,
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
u(0) = u^0, \tag{3}
$$

где $u^0 = \{u_1^0, u_2^0\}$, $f = \{f_1(t), f_2(t)\}$ - заданные элементы, $A_{ij} = A_{ij}(t)$ - линейные ограниченные операторы из V в V' ($A_{ij}(t) \in \mathcal{L}(V;V')$, $t \in [0,T]$). Исследуются случаи коэрцитивного и некоэрцитивного на $(V)^2$ операторов $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Доказывается однозначная разрешимость задачи (2),(3).

Через (2^0) обозначим систему уравнений, получающуюся из (2) при $\varepsilon = 0$.

Во втором параграфе рассматривается задача Коши для системы (2^0) с начальными данными (3), удовлетворяющими условиям согласования

$$
A_{21}(0)u_1^0 + A_{22}(0)u_2^0 = f_2(0). \tag{4}
$$

В случае коэрцитивного оператора A доказываются существование единственного решения u задачи (2^0),(3),(4) и сходимость решения u^ε задачи (2),(3),(4) к u в норме пространства $\mathcal{L}_2(0,T;(V)^2)$ со скоростью $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Аналогичные результаты получены для двух вариантов некоэрцитивного оператора A.

В третьем параграфе исследуется система уравнений второго порядка

$$
\begin{aligned}
&u_1'' + A_{11}u_1 + A_{12}u_2 = f_1, \\
&\varepsilon u_2'' + A_{21}u_1 + A_{22}u_2 = f_2
\end{aligned} \tag{5}
$$

с начальными данными

$$
u(0) = 0, \quad u'(0) = d. \tag{6}
$$

Через (5^0) обозначим систему уравнений, получающуюся из (5) при $\varepsilon = 0$.

В четвертом параграфе для системы (5^0) рассматривается задача Коши с начальными данными

$$u(0) = 0, \quad u_1'(0) = d_1 \tag{7}$$

и правой частью f, удовлетворяющей условию согласования

$$f_2(0) = 0. \tag{8}$$

В предположениях коэрцитивности и симметричности оператора A доказываются однозначная разрешимость задач (5),(6) и (5^0),(7),(8) и сходимость решения задачи (5),(6),(8) к решению задачи (5^0),(7),(8) в норме пространства $\mathcal{L}_\infty(0,T;(V)^2)$ со скоростью $O(\varepsilon^{1/4})$, $\varepsilon \to 0$.

В пятом параграфе изучается уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon v_\varepsilon'' + v_\varepsilon' + A v_\varepsilon = f \tag{9}$$

с начальными данными

$$v_\varepsilon(0) = 0, \quad v_\varepsilon'(0) = f(0). \tag{10}$$

Доказывается, что в случае симметрического коэрцитивного оператора $A(t) \in \mathcal{L}(V;V')$ решение v_ε задачи (9),(10) сходится к решению v задачи

$$v' + Av = f, \quad v(0) = 0$$

сильно в норме пространства $C(0,T;V)$ со скоростью $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

В шестом параграфе рассматриваются вопросы корректности задачи Коши для систем (2^0) и (5^0) на основании свойств решений аппроксимирующих эволюционных систем (2) и (5).

Введем гильбертово пространство V_1. Предположим, что $V \subset V_1 \subset H$ и вложения непрерывны.

В седьмом параграфе рассматривается задача Коши для системы уравнений

$$\begin{aligned} &u_1'' + B_{11}u_1' + \delta B_{12}u_2' + A_{11}u_1 + A_{12}u_2 = f_1, \\ &\varepsilon u_2'' + \delta B_{21}u_1' + \delta B_{22}u_2' + A_{21}u_1 + A_{22}u_2 = f_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где параметр δ принимает значения 0 и 1, операторы $B_{ij} = B_{ij}(t) \in \mathcal{L}(V_1;V_1')$, $t \in [0,T]$. Предполагаются симметричность оператора A и коэрцитивность операторов A и B соответственно в пространствах $(V)^2$ и $(V_1)^2$ (здесь $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$). Исследуются вопросы разрешимости задачи Коши для гиперболо-параболической системы (система (II) при $\delta = 1$, $\varepsilon = 0$) и аппроксимации ее решений решениями соответствующей задачи Коши для гиперболической системы (II) (при $\delta = 1$). Исследуется скорость сходимости решения аппроксимирующей задачи к решению исходной. Также изучены гиперболо-эллиптическая система (система (II) при $\delta = \varepsilon = 0$) и ее аппроксимация гиперболическими системами (II) (при $\delta = 0$).

В восьмом параграфе приведены примеры краевых задач (газовой динамики, динамики жидкости, теории фильтрации) для систем уравнений в частных производных (и систем, содержащих интегро-дифференциальные уравнения) составного типа, для которых теоремы существования и аппроксимации решений сводятся к задаче Коши для изученных выше дифференциальных операторных уравнений.

В девятом параграфе на примере линейной системы уравнений типа Навье-Стокса в случае задачи Коши доказывается возможность сходимости решения аппроксимирующей задачи к решению исходной вместе с производными по t, x любого наперед заданного порядка.

В настоящее время в связи с проблемой окружающей среды и, в частности, прогноза погоды важное значение придается изучению состояния атмосферы и океана, их динамике. Существуют различные математические модели. Предложены методы исследования возникающих здесь краевых задач (Г.И.Марчук, Г.В.Демидов, В.П.Кочергин, Л.В.Овсянников, А.С.Саркисян и их ученики). В работах автора изучались вопросы аппроксимации некоэрцитивных стационарных задач динамики океана сильно эллиптическими задачами, содержащими малый параметр. В нестационарном случае вопросы корректности краевых задач для различных полуэволюционных систем квазилинейных уравнений динамики океана и возможность их аппроксимации задачами, удобными для численного счета, впервые изучены в работах автора. Вопросы корректности краевых задач для квазилинейных систем уравнений динамики атмосферы изучал В.И.Сухоносов.

Во второй главе изложены результаты автора по изучению корректности и аппроксимации краевых задач динамики океана.

В первом параграфе в области Q трехмерного пространства, ограниченной поверхностями $h = h(x_1, x_2)$ и $\zeta = \zeta(x_1, x_2)$ ($\{x_1, x_2\} \in \Omega \subset E_2$, $h(x_1, x_2) \leq \zeta(x_1, x_2)$), рассматривается полуэволюционная квазилинейная интегро-дифференциальная система уравнений

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}^{(1)}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\Big)+\ell u_2+g_1\frac{\partial \xi}{\partial x_1}+d_1\int_0^{x_3}\frac{\partial \rho}{\partial x_1}dx_3=\mathcal{F}_1,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}^{(2)}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\Big)-\ell u_1+g_2\frac{\partial \xi}{\partial x_2}+d_2\int_0^{x_3}\frac{\partial \rho}{\partial x_2}dx_3=\mathcal{F}_2, \qquad (I2)$$

$$\int_h^{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(g_1u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(g_2u_2)\Big]dx_3=0,$$

$$\mathcal{L}(u,\rho)+\mathcal{L}(u,\hat\rho)=f,$$

где $u=\{u_1,u_2\}$, ρ, ξ – неизвестные функции, $\mathcal{L}(u,\rho)$ –дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$\mathcal{L}(u,\rho)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{m=1}^{2}\big(a_m^{(1)}u_m+b_m^{(1)}\big)\frac{\partial\rho}{\partial x_m}+\sum_{m=1}^{2}c_m^{(1)}\int_h^{x_3}c_m^{(2)}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x_m}\big(a_m^{(2)}u_m+b_m^{(2)}\big)dx_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}^{(3)}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\Big).$$

Для системы (I2) задаются начальные и краевые условия

$$\rho\big|_{t=0}=\rho_0,\quad \rho\big|_{\partial Q}=0, \qquad (I3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{S_1}=0,\quad u\big|_{S_2}=0,\quad S_1\cup S_2=\partial Q.$$

Вводятся основные обозначения и предположения относительно данных задачи. Даётся определение решения (обобщенного) задачи (I2),(I3).

Во втором параграфе доказывается однозначная разрешимость задачи (I2),(I3). Доказательство проводится методом регуляризации. Обозначим через ($I2_\varepsilon$) систему (I2), в которой вместо третьего уравнения взято уравнение

$$\int_h^{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(g_1u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(g_2u_2)\Big]dx_3=\varepsilon\Delta\xi.$$

Через ($I3_\varepsilon$) обозначим краевые условия (I3) плюс краевое условие на ξ: $\xi\big|_{\partial\Omega}=0$. Система ($I2_\varepsilon$) является эллиптико-параболической. Регуляризирующая задача($I2_\varepsilon$),($I3_\varepsilon$) допускает необходимые априорные оценки на все компоненты решения (в задаче (I2),(I3) нет априорной оценки на ξ). Доказываются существование и единственность решения

$\{u^\varepsilon, p^\varepsilon, \xi^\varepsilon\}$ задачи ($I2_\varepsilon$),($I3_\varepsilon$) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Для доказательства существования применяется алгоритм последовательного решения сильно эллиптической задачи и решения первой краевой задачи для линеаризированного параболического уравнения. При $\varepsilon \to 0$ доказывается сходимость $\{u^\varepsilon, p^\varepsilon, \xi^\varepsilon\}$ к решению $\{u, p, \xi\}$ задачи (I2),(I3).

В третьем параграфе изучается аппроксимация задачи (I2),(I3) соответствующей задачей для эволюционной системы ($I2_\nu$), получающейся из (I2) добавлением в первое, второе и третье уравнения (левые части) членов $\nu \frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\nu \frac{\partial u_2}{\partial t}$ и $\nu \frac{\partial \xi}{\partial t}$ соответственно. Доказываются существование и единственность решения $\{u^\nu, p^\nu, \xi^\nu\}$ задачи ($I2_\nu$), ($I3_\nu$), где ($I3_\nu$) обозначает краевые условия (I3) плюс начальное условие для ξ^ν : $\xi^\nu|_{t=0} = \xi^0$, и сходимость $\{u^\nu, p^\nu, \xi^\nu\}$ к $\{u, p, \xi\}$. Даны оценки скорости сходимости.

В четвертом параграфе в качестве примеров приводятся задачи динамики океана, сводящиеся к задаче (I2),(I3). Отметим, что в изучаемых системах уравнений динамики океана уравнения движения линеаризованы, а уравнение на плотность остается квазилинейным. Такие системы в настоящее время используются при численных расчетах течений океана.

В пятом параграфе рассматривается смешанная краевая задача для квазилинейной системы уравнений, описывающих трехмерные стационарные течения океана. Строится ее коэрцитивная ε -аппроксимация.

В шестом параграфе на основании полученных априорных оценок доказывается теорема существования решения аппроксимирующей задачи в классе W_2^1 и сходимость при $\varepsilon \to 0$ ее решений к решению исходной задачи.

В седьмом параграфе изучается линейная стационарная задача.

В восьмом параграфе предложена операторная схема, обобщающая метод регуляризации стационарных краевых задач динамики атмосферы, океана и вязкой несжимаемой жидкости. Сформулированы основные теоремы существования и аппроксимации.

Псевдопараболические уравнения и системы возникают в различных физических задачах, включая задачи теплопроводности, динамики жидкости, распространения длинных волн малой амплитуды и многие другие. Различные классы псевдопараболических уравнений изучали Х.Брилл, С.А.Гальперн, А.Г.Костюченко и Г.И.Эскин, Т.Матагаши и М.Цуцуми, А.П.Осколков, Т.Тинг, Б.Тон, Р.Шовальтер, Х.Гаевский, К.Захариас. Исследовалась задача Коши

$$\frac{d}{dt}\{\delta u + \varepsilon R(u)\} + N(u) + \mu \mathcal{L}(u) = f, \qquad (I4)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \qquad (I5)$$

где μ, ε, $\delta = const$, $0 \le \mu, \varepsilon, \delta \le k$; $R, N, \mathcal{L}$ – заданные операторы (R, $\mathcal{L}$ – линейные) с областью определения в некотором банаховом пространстве, u^0, f – заданные элементы.

В работах автора и Н.Н.Яненко предложены новые аппроксимации уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, которые сводятся к уравнениям вида (I4) с нелинейным оператором R. Эти работы позволили выделить класс псевдопараболических уравнений, определяемый свойствами операторов R, N, $\mathcal{L}$ и отличный от изученных ранее.

В третьей главе изучается задача Коши для уравнения (I4) и систем дифференциальных операторных уравнений составного типа, содержащих псевдопараболические уравнения. Исследуются вопросы существования, единственности решения и различные вопросы аппроксимации уравнений и систем. Все задачи рассматриваются на произвольно заданном отрезке времени $[0,T]$.

Рассмотрим сепарабельное рефлексивное банахово пространство U и гильбертовы пространства V, H, удовлетворяющие соотношениям $U \subset V \subset H$. Считаем, что вложения плотны и непрерывны. Отождествляя пространство H со своим сопряженным, получим вложения $U \subset V \subset H \subset V' \subset U'$.

В первом параграфе рассматривается уравнение (I4) с операторами $R: U \to U'$; $N: U \to H$, $\mathcal{L}: V \to V'$. Предполагается, что R, N, вообще говоря, – нелинейные операторы, $\mathcal{L}$ – линейный. На операторы, входящие в уравнение (I4), налагаются ограничения, в конечном счете сводящиеся к следующим основным предположениям. Для галеркинских приближений решения задачи (I4),(I5) существует равномерная по n априорная оценка в норме $\mathcal{L}_\infty(0,T;U)$. Оператор $R: U \to U'$ – непрерывен и индуцирует монотонный и семинепрерывный оператор $R: \mathcal{L}_p(0,T;U) \to \mathcal{L}_{p'}(0,T;U')$, $p \geqslant 2$. Оператор $\mathcal{L}: V \to V'$ – коэрцитивный, оператор $N: U \to H$ обладает свойствами "усиленной" слабой компактности. Выполнение указанных предположений позволяет провести доказательство существования решения задачи (I4),(I5) методом монотонных операторов. В случае $\mu > 0$ при выполнении дополнительного ограничения на оператор $N: U \to H$ доказывается единственность решения задачи (I4),(I5).

Во втором параграфе рассматривается уравнение

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{N}(u) + \mu\mathcal{L}(u) = f, \tag{I6}$$

получающееся из (I4) при $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$. В случае, когда $\mathcal{N} \in \mathcal{L}(V;H)$, доказывается сходимость решения u^ε задачи (I4),(I5) (при $\delta = 1$) к решению u задачи (I6),(I5) при $\varepsilon \to 0$

В третьем параграфе в качестве приложений рассматриваются аппроксимации задач динамики вязкой несжимаемой жидкости, принадлежащие классу псевдопараболических уравнений, изученному выше.

В четвертом параграфе рассматривается уравнение

$$\frac{d}{dt} R(u) + \mathcal{L}(u) = f, \tag{I7}$$

получающееся из (I4) при $\delta = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$ и операторе $\mathcal{N} \equiv 0$. Задача Коши для этого уравнения ставится следующим образом:

$$R(u)\big|_{t=0} = a, \qquad a \in U'. \tag{I8}$$

Доказывается однозначная разрешимость задачи (I7),(I8). Ее решение строится как предел при $\varepsilon \to 0$ решений задачи

$$\frac{d}{dt}\{\varepsilon u + R(u)\} + \mathcal{L}(u) = f,$$
$$u\big|_{t=0} = u^0,$$

где u^0 – решение уравнения $R(v) = a$ Рассматривается также более общий случай, когда пространство U не обязательно вложено в V, но вложено в H ($U, V \subset H$). При этом мы считаем, что вложения пространств U и V в H плотны и непрерывны и существует банахово пространство B, непрерывно вложенное в пространства U и V. Приводятся примеры краевых задач для уравнений в частных производных, сводящиеся к задаче вида (I7),(I8), и их аппроксимации.

В пятом параграфе изучается система дифференциальных операторных уравнений составного типа с малым параметром

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} R(u_1) + \mathcal{N}_1(u) + \mathcal{L}_1(u_1) = f_1, \\ \varepsilon\frac{du_2}{dt} + \mathcal{N}_2(u) + \mathcal{L}_2(u_2) = f_2, \end{gathered} \tag{I9}$$

где $R : U \to U'$, $\mathcal{L}_i : V \to V'$, $\mathcal{N}_i : U \times V \to V'$, $i = 1,2$, – заданные операторы, $u = \{u_1, u_2\}$ – неизвестный, $f = \{f_1, f_2\}$ – заданный векторы. На операторы, входящие в систему (I9), накладываются ограничения, аналогичные предположениям первого параграфа относительно операторов R, $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$. Эти ограничения позволяют доказать существование и единственность решения системы (I9) с начальными данными

$$u\big|_{t=0} = u^{\circ} \tag{20}$$

Через (I9°) обозначим полуэволюционную систему, получающуюся из (I9) при $\varepsilon = 0$. Естественно, что начальные данные в случае системы (I9°) нужно задавать лишь для компоненты u_1:

$$u_1\big|_{t=0} = u_1^{\circ}. \tag{2I}$$

Изучены вопросы корректности задачи (I9°),(2I) и аппроксимации ее решений решениями задачи (I9),(20). Приводятся примеры краевых задач для систем уравнений в частных производных, сводящихся к задачам (I9),(20) и (I9°),(2I).

В шестом параграфе для случая, когда оператор $\mathcal{N}_1$ переводит пространство $U \times V$ в U', а оператор $\mathcal{N}_2$ переводит пространство $U \times V$ в V', сформулированы предположения, гарантирующие разрешимость задач (I9),(20) и (I9°),(2I) и сходимость решений u^{ε} задачи (I9),(20) к решению задачи (I9°),(2I).

Одним из методов исследования корректности краевых задач является метод слабой аппроксимации (МСА), сформировавшийся в работах Н.Н.Яненко, А.А.Самарского, Н.Н.Яненко и Г.В.Демидова. Различные вопросы МСА для дифференциальных уравнений изучали Д.Г.Гордезиани, Э.Г.Гегечкори, С.А.Кантор, В.А.Новиков, В.Ф.Рапута, У.М.Султангазин, Р.Темам и автор.

Четвертая глава посвящена изучению на основе МСА первой краевой задачи и задачи Коши для распадающихся квазилинейных параболических систем и систем уравнений первого порядка, а также для соответствующих им полуэволюционных систем. Исследуются вопросы разрешимости в целом краевых задач. Изучаются вопросы устойчивости в целом, устойчивости и асимптотической устойчивости стационарных решений. Другие методы исследования устойчивости стационарных решений см. в работах Т.И.Зеленяка, В.П.Михайлова, В.И.Зубова, В.С.Белоносова.

В первом и втором параграфах техника применения МСА к нелинейным уравнениям, разработанная автором, иллюстрируется на примере двумерной квазилинейной параболической системы типа Бюргерса (модельная система гидродинамики)

$$u_t + (u, \nabla)u - \mu\Delta u = f, \quad \mu = const > 0, \tag{22}$$

с данными Коши $u\big|_{t=0} = u^{\circ}$. Исследуется сходимость МСА в случае, когда система (22) расщепляется на четыре одномерные системы: параболические – на нечетных дробных шагах, нелинейные гиперболические –

на четных; исследуются расщепление системы (22) на две одномерные параболические системы и расщепление на систему $u_t+2(u,\nabla)u=0$ и систему $u_t=2\mu\Delta u+2f$.

В третьем параграфе методом слабой аппроксимации для системы (22) решается в прямоугольнике первая краевая задача с однородными граничными условиями. Решение исходной задачи аппроксимируется в прямоугольнике решениями периодической задачи Коши.

В четвертом параграфе в случае задачи Коши изучается устойчивость нулевого решения системы

$$u_t+(u,\nabla)u-\mu\Delta u=f(u) \qquad (23)$$

с нелинейной правой частью f, удовлетворяющей условию $f(0)=0$. В зависимости от свойств функции Ляпунова для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt}=f(u) \qquad (24)$$

доказываются устойчивость в целом, устойчивость и асимптотическая устойчивость в норме $\mathcal{L}_\infty$ нулевого решения системы (23). Функция $f(u)$, вообще говоря, не удовлетворяет условиям типа Осгуда.

В пятом параграфе исследуется устойчивость нулевого решения первой краевой задачи для системы (23). В зависимости от свойств функций Ляпунова для системы (24) доказываются однозначная разрешимость в целом первой краевой задачи для системы (23), а также устойчивость в целом, устойчивость и асимптотическая устойчивость нулевого решения в норме $\mathcal{L}_\infty$. В отличие от предыдущего параграфа исследуются обобщенные решения, вследствие чего применяется техника МСА в пространствах Соболева.

В шестом параграфе в цилиндре $Q_T=\{(t,x)/0<t<T,\ x\in\Omega\}$, где $\Omega\subset E_2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2, изучается первая краевая задача

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{j=1}^{2}b_{kj}(t,x,u)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\{a_{ij}^{(k)}(t,x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\}= f_k(t,x,u),\ k=1,2, \qquad (25)$$

$$u(0,x)=u^0(x),\quad u^0(x)\in\mathcal{P}\quad \forall x\in\Omega, \qquad (26)$$
$$u|_{\partial\Omega}=S,\quad S\in\mathcal{P}.$$

Здесь S – постоянный вектор, $\mathcal{P}$ – заданный прямоугольник в фазовой плоскости переменных u_1, u_2. Предполагается, что при всех

$\{t,x\}\in\bar{Q}_T$ имеет место равенство $f(t,x,S)=0$. Доказывается, что если для всех $\tau\in(0,\tau_0]$ решение задачи

$$\frac{dv}{dt}=\rho f(t,x,v),\ \rho=const>1,\ x\in\bar{\Omega}, \qquad v(\theta)=v_\theta \tag{27}$$

на любом отрезке $[\theta,\theta+\tau]$, где $\theta\in[0,T-\tau]$, существует при любых начальных данных $v_\theta\in\mathcal{P}$ и не выходит из $\mathcal{P}$, то задача (25), (26) однозначно разрешима. Если при этом решение задачи (27) строго монотонно стремится к S, то решение задачи (25),(26) стремится к S в норме $\mathcal{L}_\infty(\Omega)$ при $t\to\infty$.

В седьмом параграфе в случае системы уравнений (25) с данными Коши

$$u(0,x)=u^0(x),\quad x\in E_2, \tag{28}$$

доказано, что если входные данные класса C^∞, $u^0(x)\in\mathcal{P}$ при всех $x\in E_2$ и выполняются упомянутые выше предположения относительно задачи (27), то задача (25),(28) однозначно разрешима (в классе C^∞) и ее решение при $t\to\infty$ стремится к S в норме $\mathcal{L}_\infty(E_2)$. Аналогичные результаты доказаны для полулинейной системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{j=1}^{2}g_{kj}(t,x)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=f(t,x,u),\quad k=1,2. \tag{29}$$

В восьмом параграфе результаты разрешимости в целом и устойчивости по Ляпунову, изложенные выше, распространены на случай систем с произвольным числом уравнений и независимых переменных.

В девятом параграфе изучены полуэволюционные системы уравнений первого и второго порядков, соответствующие системам (29) и (25).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

I. Для широкого класса линейных полуэволюционных систем дифференциальных уравнений с неограниченными операторами в гильбертовом пространстве исследованы корректность задачи Коши и вопросы аппроксимации ее решений решениями соответствующих задач для эволюционных систем. Изучены случаи систем уравнений первого и второго порядков по времени.

2. Доказаны корректность задачи Коши для систем уравнений второго порядка составного типа и теоремы аппроксимации решениями сильно гиперболических систем, содержащих малый параметр.

3. Получены теоремы однозначной разрешимости различных краевых задач для квазилинейных систем уравнений составного типа, описываю-

щих нестационарные течения океана. Предложены корректные эллиптико-параболическая и эволюционная регуляризации. Получены оценки скорости сходимости решений регуляризирующих задач к решениям исходных.

4. Доказаны разрешимость некоэрцитивных стационарных краевых задач динамики океана и возможность аппроксимации их решений решениями удобных в вычислительном отношении коэрцитивных задач.

5. Выделен и изучен новый класс нелинейных псевдопараболических уравнений и систем уравнений в банаховом пространстве, содержащий, в частности, различные уравнения динамики жидкости, теории горения. Исследована корректность задачи Коши.

6. Исследованы вопросы сходимости решений аппроксимирующих эволюционных задач, содержащих малый параметр, к решениям соответствующих задач для полуэволюционных систем, содержащих псевдопараболические уравнения.

7. Для распадающихся квазилинейных параболических систем, не удовлетворяющих условиям типа Осгуда, доказаны теоремы разрешимости в целом задачи Коши и первой краевой задачи, теоремы устойчивости в целом, устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарных решений. В случае задачи Коши аналогичные результаты доказаны для полулинейных распадающихся систем уравнений в частных производных первого порядка.

8. Доказана разрешимость в целом первой краевой задачи для полуэволюционных квазилинейных распадающихся систем эллиптико-параболического типа с нелинейной правой частью, не удовлетворяющей условиям типа Осгуда.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах

I. Белов Ю.Я. Об аппроксимации некоторых неэволюционных систем уравнений эволюционными. – В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.I, №6. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1970, с.3-I8.

2. Белов Ю.Я. О методе слабой аппроксимации для первой краевой задачи. – В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.4, №2. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973, с.I2-I9.

3. Белов Ю.Я. Об устойчивости нулевого решения одной квазилинейной системы. – В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.4, №I. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973, с.I6-24.

4. Белов Ю.Я. Об аппроксимации неэволюционных систем уравнений. –

В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.5, №4. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1974, с.5-13.

5. Белов Ю.Я. Об аппроксимации одного класса систем линейных дифференциальных уравнений. - Докл. АН СССР, 1975, т.220, №4, с.765-768.

6. Белов Ю.Я. О сильно гиперболических системах с малым параметром в гильбертовом пространстве. - Докл. АН СССР, 1976, т.231, №4, с.784-787.

7. Белов Ю.Я. О некоторых системах линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Докл. АН СССР, 1976, т.231, №5, с.1037-1040.

8. Белов Ю.Я. О некоторых системах линейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.7, №3. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976, с.13-29.

9. Белов Ю.Я. О сильно гиперболических системах с малым параметром в гильбертовом пространстве. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.7, №4. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976, с.16-29.

10. Белов Ю.Я. Об аппроксимации одной линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка. - Математические заметки, 1976, т.20, №5, с.693-701.

11. Белов Ю.Я. Об однозначной разрешимости одной задачи течений мирового океана. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.8, №4. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1977, с.20-33.

12. Белов Ю.Я. Об одной квазилинейной стационарной задаче динамики океана. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.9, №5. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1978, с.13-27.

13. Белов Ю.Я. О корректности одной задачи динамики бароклинного океана. - Депонирована в ВИНИТИ за №148-78 деп. - Аннот.: Сиб. мат.ж., 1978, т.19, №6, с.1428.

14. Белов Ю.Я. Теоремы однозначной разрешимости и аппроксимации некоторых краевых задач для систем уравнений, описывающих течения океана. - Сиб.мат. ж., 1979, т.20, №6, с.1206-1225.

15. Белов Ю.Я. Об одной линейной стационарной задаче динамики океана. - Математические заметки, 1979, т.26, №1, с.45-52.

16. Белов Ю.Я. Об устойчивости нулевого решения первой краевой задачи для системы уравнений типа Бюргерса-Хопфа. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.10, №5. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1979, с.9-20.

17. Белов Ю.Я. Об одной системе нелинейных операторных уравнений в банаховом пространстве. - Докл. АН СССР, 1978, т.243, №3, с.557-560.

18. Белов Ю.Я. Устойчивость нулевого решения первой краевой задачи для системы уравнений типа Бюргерса-Хопфа. - В кн.: Дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск, 1980, с.71-72.

19. Белов Ю.Я., Демидов Г.В. Решение задачи Коши для системы уравнений типа Хопфа методом слабой аппроксимации. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.1, №1. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1970, с.3-16.

20. Белов Ю.Я., Саватеев Е.Г. Об аппроксимации систем составного типа. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.9, №6. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1978, с.12-24.

21. Белов Ю.Я.,Яненко Н.Н. Об одной регуляризации уравнения Бюргерса. - Докл. АН СССР, 1979, т.246, №3, с.521-524.

22. Белов Ю.Я., Яненко Н.Н. Нелокальные уравнения вязкой жидкости. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.10, №4, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1979, с.5-22.

23. Белов Ю.Я., Яненко Н.Н. Нелокальное нелинейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.10, №6. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1979, с.5-26.

24. Белов Ю.Я., Яненко Н.Н. Об одном классе нелокальных нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - Докл. АН СССР, 1980, т.252, №6, с.1292-1296.

25. Белов Ю.Я., Яненко Н.Н. Задача Коши для псевдопараболического уравнения в банаховом пространстве. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.11, №7. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1980, с.12-22.

Ответственный за выпуск Белов Ю.Я.

Подписано к печати I7.06.82 МН I7085
Формат бумаги 60х84/I6. Усл. печ. л. I,I2. Уч.изд.л. I,2.
Тираж I20 экз. Заказ № 42 Бесплатно

Отпечатано на ротапринте ИТПМ СО АН СССР
630090, Новосибирск, 90, Институтская, 4/I