АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ
имени М.А.ЛАВРЕНТЬЕВА

На правах рукописи

Мелешко Сергей Васильевич

РЕШЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НЕУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 1981

ческой и прикладной механики

о Н.Н.,

.с. ШАПЕЕВ В.П.

доктор физико-математических наук,
профессор НЕМИРОВСКИЙ Ю.В.,

доктор физико-математических наук,
профессор СИДОРОВ А.Ф.

Ведущая организация: Институт горного дела СО АН СССР

Защита состоится "_____" ______________ 1981 г. в _______ часов на заседании специализированного совета К 002.55.01 по присуждению ученой степени кандидата наук в Институте гидродинамики имени М.А.Лаврентьева СО АН СССР (630090, г.Новосибирск-90, проспект Науки, 15)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института гидродинамики СО АН СССР.

Автореферат разослан "_____" ____________ 1981г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико-математических наук Ю.М.Волчков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследования по распространению волн в неупругих средах были начаты в сороковых годах. Интерес к этой проблеме рожден большой практической важностью задач о динамической прочности сооружений и конструкций, задач физики взрыва в твердых телах, исследованием динамических процессов в материалах при высоких скоростях нагружения, изучением поведения новых материалов в динамических процессах, построением новых моделей механики деформируемого твердого тела, решением конкретных физических задач, связанных с этими проблемами и многочисленными другими прикладными задачами, в которых приходится изучать динамическое напряженно-деформированное состояние.

Изучение этих вопросов требует развития соответствующего математического аппарата и прежде всего методов теории дифференциальных уравнений. Особую важность для теории и практики имеет получение точных решений волновых задач динамики деформируемого твердого тела.

Целью работы является построение точных решений волновых задач динамики деформируемого твердого тела и дальнейшее развитие метода дифференциальных связей для решения этих задач.

Научная новизна. Найдены новые классы точных решений уравнений динамики неупругой сплошной среды, получены новые результаты по решению волновых задач динамики деформируемого твердого тела, в частности, решена задача о распаде произвольного разрыва в неупругой сплошной среде с внутренними изменениями, установлены новые свойства точных решений уравнений математической физики. Эти результаты имеют практическую и теоретическую значимость.

Практическая ценность. Научные выводы, касающиеся построения точных решений, могут быть использованы при постановке и решении краевых задач механики деформируемого твердого тела. Например, распад разрыва имеет место при соударении твердых тел.

Точные решения, во-первых, позволяют решать конкретные физические задачи, во-вторых, служат тестами для апробирования и сравнения различных численных методик, в-третьих, при численных расчетах всегда получается решение какой-то конкретной задачи, а аналитическое исследование позволяет провести анализ свойств решений целого класса задач, что в некоторых случаях численными методами сделать невозможно, кроме этого, многие численные методики плохо передают особенности в решении.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены и обсуждены на Всесоюзном семинаре по аналитическим методам в газовой динамике (Иркутск, 1980), на Всесоюзном семинаре "Системы квазилинейных уравнений и их приложения в механике сплошных сред" (руководители: профессор Б.Л.Рождественский, профессор В.А.Тупчиев), на семинаре Центрального института математики и механики АН ГДР (Берлин), на семинарах Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР: "Численные методы механики сплошной среды"(руководитель - академик Н.Н.Яненко), "Газодинамика многофазных систем" (руководитель - к.ф.-м.н. В.М.Фомин), на конференции молодых ученых ИТПМ СО АН СССР 1980 года, на семинаре по нелинейным задачам математической физики ИММ УНЦ АН СССР (руководитель - профессор А.Ф.Сидоров), на семинаре отдела механики деформируемого твердого тела Института гидродинамики СО АН СССР (руководитель - профессор О.В.Соснин).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-5].

Структура и объем работы. Работа, состоящая из введения и трех глав, изложена на 134 страницах машинописного текста, содержит приложение и список литературы из 130 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлен краткий обзор работ по распространению волн в неупругих средах и по аналитическим методам получения точных решений, в частности, дана формулировка метода дифференциальных связей, впервые сформулированного Н.Н.Яненко на IV Всесоюзном математическом съезде и в дальнейшем развиваемого в работах А.Ф.Сидорова, В.А.Сучкова, Л.В.Комаровского, Е.Н.Зубова, В.П.Шапеева, В.Е.Распопова, А.Е.Жижина; кратко изложены основные результаты работы.

Для упруго-пластических материалов, поведение которых описывается уравнением состояния Кармана-Тейлора-Рахматулина, решение волновых задач строится с помощью инвариантов Римана в классе автомодельных решений. Но для многих моделей распространение волн напряжений в неупругих средах описывается неоднородными системами квазилинейных дифференциальных уравнений, у которых, вообще говоря, отсутствуют автомодельные решения и инварианты Римана. Вторая глава посвящена решению задач о распространении волн в неупругих средах, в которых массовые скорости частиц, напряженное и деформированное состояния можно представить зависящими от временной и одной пространственной переменных. Рассматриваются неупругие среды, описываемые неоднородными системами квазилинейных дифференциальных уравнений.

Важную роль в решении волновых задач играют центрированные волны. Центрированные волны рассмотрены в §I, в котором дано решение задачи Гурса для неоднородной системы квазилинейных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Решение задачи Гурса сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, при единственном предположении, что система допускает $D_1^{z-1}\,\Pi_1^1$ -решения с квазилинейными дифференциальными связями.

В §2 решена задача о распаде произвольного разрыва для системы уравнений, описывающей одномерное движение материала с внутренними изменениями, вызванными пластическими деформациями. При этом, в отличие от движений упруго-пластической среды с уравнением состояния Кармана-Тейлора-Рахматулина, установлено:

I) роль решений, характеризуемых постоянством одного из инвариантов Римана, играют ДП-решения, характеризуемые дифференциальными связями, с однофункциональным произволом;

2) в решении задачи о распаде разрыва, которое строится путем примыкания различных ДП-решений друг к другу, границы зон, разделяющие различные ДП-решения, определяются решением систем обыкновенных дифференциальных уравнений;

3) нахождение решений в различных зонах сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений;

4) (σ, v) - диаграммы находятся интегрированием систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве годографа.

В этом же параграфе решена задача о растяжении стержня, которая также сведена к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В §3 рассмотрена задача о распаде произвольного разрыва для системы уравнений, описывающей одномерные динамические процессы в неупругой сплошной среде с уравнением состояния вида Соколовского-Малверна

$$\dot{\sigma} = \varphi'(\varepsilon)\dot{\varepsilon} + C(\sigma - \varphi(\varepsilon)).$$

Исследованы все возможные конфигурации распада разрыва. Решения строятся в классе ДП-решений.

§4 посвящен анализу задачи о распространении продольно-поперечных волн, зависящих от одной пространственной переменной x_1 и времени t в упруго-вязкопластической среде. Рассмотрен класс краевых условий с заданными скоростями на границе ($x_1 = 0$)

$$v_1 = U_0 \quad , \qquad v_2 = V(t).$$

Решение строится в классе ДП-решений с однофункциональным произволом. Наличие одной произвольной функции в решении позволяет считать функцию $V(t)$ произвольной. Кроме этого, само решение в пяти различных областях, как и границы зон, находятся интегрированием систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для решения задач, рассмотренных во второй главе, необходимо провести дальнейшие исследования по самому методу дифференциальных связей:

I) найти условия совместности (ДП-условия) системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + G(u,x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - f(u,x,t) = 0$$

с присоединенной к ней системой q дифференциальных связей порядка m

$$\text{(D)} \qquad D \equiv B_1 L \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \Psi\left(B_2 L \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \ldots, u, x, t\right) = 0,$$

где u , f – векторы-столбцы, L, $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$,

G – квадратные матрицы порядка r , причем L – невырожденная, а матрицы B_1 , B_2 с элементами

$$(B_1)_{ij} = \delta_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, q; \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

$$(B_2)_{kj} = \delta_{k+q\,j}\,, \quad k=1,2,\dots,r-q\,;\ j=1,2,\dots,r,$$

(δ_{ij} – символ Кронекера);

2) рассмотреть характеристики переопределенных систем (SD) и соотношений вдоль них;

3) доказать теоремы существования и единственности гладких решений;

4) исследовать примыкание друг к другу различных ДП-решений (решений системы (S), характеризуемых дифференциальными связями (D)).

Решению этих задач посвящена первая глава. В §I доказана

<u>Теорема I</u>. Для того, чтобы система (S) имела $D_m^q\,\mathcal{T}_1^{r-q}$ -решения, характеризуемые дифференциальными связями (D), необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$\left(\frac{dD}{dt} + (B_1+\Psi_y B_2)\mathcal{A}B_1'\,\frac{dD}{dx} - (B_1+\Psi_y B_2)\,\frac{d^m S}{dx^m}\right)\Big|_{(SD)} = 0,$$

$$(B_1+\Psi_y B_2)\mathcal{A} = (B_1+\Psi_y B_2)\mathcal{A}B_1'(B_1+\Psi_y B_2),$$

где $\frac{d}{dt}$, $\frac{d}{dx}$ – полные производные,

$$\mathcal{A} = LGL^{-1}\,, \qquad y = B_2 L\,\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\,,$$

$$S = Lu_t + \mathcal{A}Lu_x - Lf\,.$$

В §2 доказано, что у системы (SD) не более чем $r-q$ характеристик. Выписаны соотношения вдоль характеристик для случая квазилинейных дифференциальных связей (D).

В §3 доказаны теоремы существования и единственности гладких решений переопределенных систем (SD). В частности, доказана

<u>Теорема I</u>. Пусть (S) гиперболическая система с L, $\mathcal{A}$, $f \in C^m$, $\Psi \in C^1$ и (SD) в инволюции, тогда существует единственное решение $u(x,t) \in C^m$ задачи Коши для системы (SD) с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x) \in C^m$ удовлетворяющими дифференциальным связям (D) при $t=0$.

В §4 рассмотрен вопрос примыкания различных ДП-решений друг к другу как через сильный, так и через слабый разрывы.

В третьей главе рассмотрено распространение плоских двумерных волн напряжений. Построены классы точных решений, описывающих распространение продольных и поперечных волн напряжений в упруго-вязкопластической среде (§3). Указаны необходимые и достаточные условия того, что решение задачи Коши определяет волновое движение в классе поперечных или продольных волн напряжений. Для построения этих решений необходимо было рассмотреть следующие вопросы: I) ДП-условия для систем со многими независимыми переменными (§I); 2) частный класс $D_1^{n(\tau-1)}\Pi_1^n$ – решений (решений типа простых волн), который является обобщением простых волн на неоднородные системы квазилинейных дифференциальных уравнений (τ – количество зависимых, n – количество независимых переменных) (§2).

В §2 также указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы решение задачи Коши лежало в классе решений типа простых волн. Дан метод построения этих решений. Таким образом, получена общая теория решений типа простых волн для неоднородных систем.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

I. Решена задача о распаде произвольного разрыва в неупругой сплошной среде.

2. Решена задача о растяжении стержня из неупругого материала с внутренними изменениями, вызванными пластическими деформациями.

3. Построено решение задачи о сдвигающе-сжимающей деформации упруго-вязкопластического полупространства.

4. Решена задача о распространении двумерных продольных и поперечных волн напряжений в упруго-вязкопластической среде.

5. Найдены необходимые и достаточные условия совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений.

6. Доказаны теоремы существования решений краевых задач для переопределенных систем дифференциальных уравнений и рассмотрено примыкание различных ДП-решений как через слабый, так и через сильный разрывы.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность моим научным руководителям Николаю Николаевичу Яненко и Василию Павловичу Шапееву за постановку задач и постоянное внимание к моей работе.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

I. Мелешко С.В., Шапеев В.П. Приложение ДП-решений к задаче о распаде произвольного разрыва в неупругой сплошной среде.- Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, Б.и., 1979, т. 10, № 6, с. 85-96.
2. Мелешко С.В. ДП-условия и задача примыкания различных ДП-решений друг к другу.- Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, Б.и., 1980, т.11, № 6, с. 96-109.
3. Мелешко С.В., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и задача о распаде произвольного разрыва.- Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 4, с. 796-798.
4. Мелешко С.В., Шапеев В.П. Задача Гурса для неоднородных систем дифференциальных уравнений.- Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, Б.и., 1980, т.11, №7, с.109-117.
5. Мелешко С.В. Метод дифференциальных связей и задача о распаде произвольного разрыва. - Численные методы решения задач механики сплошной среды. Новосибирск, 1980, с. 24-25. (Препринт /Институт теоретической и прикладной механики, №47).

Мелешко Сергей Васильевич

РЕШЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НЕУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Подписано к печати 13.04.81, МН 06220,
Формат бумаги 60х84, 1/16. Уч.-изд.л. 0.7, Усл.печ.л.0.8,
Заказ № 27 Тираж 150 экз.

Отпечатано в Институте теоретической и прикладной механики
СО АН СССР, 630090, Новосибирск-90, Институтская 4/1.