АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

КОРОБИЦЫН Владимир Анатольевич

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

НОВОСИБИРСК–1980

Научный руководитель – академик Н.Н.ЯНЕНКО

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Б.Л.РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

доктор физико-математических наук
В.Г.РОМАНОВ

Ведущая организация Институт Гидродинамики
Сибирского отделения АН СССР

Защита состоится "___" ________________ 1980г. в ____ час.
на заседании специализированного Совета К.002.10.01
по присуждению ученой степени кандидата наук при
Вычислительном центре СО АН СССР по адресу:
Новосибирск, 90, проспект Науки, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Вычислительного центра СО АН СССР.

Автореферат разослан "___" ________________ 1980 года

Ученый секретарь специализированного
Совета, доктор физико-математических наук

Ю.Е.АНИКОНОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Разработка новых эффективных численных методов теории разностных схем невозможна без исследования аналитических свойств разностных уравнений. В последние годы возникло новое направление в теории разностных схем - изучение слабо устойчивых разностных уравнений. Решениями слабо устойчивых разностных схем могут быть неограниченно растущие функции, поэтому практическое использование слабо устойчивых схем сталкивается с серьезными трудностями. Устранение этих затруднений возможно сведением слабо устойчивой схемы к разностной схеме, устойчивой в обычном смысле. Известно, также, что для уравнений газовой динамики один из основных источников неточностей численного расчета особенностей решений связан с отсутствием инвариантности разностной схемы относительно преобразований переноса и поворота. Поэтому задача изучения преобразований разностных уравнений и алгебраических свойств решений разностных уравнений является актуальной. Изучение алгебраических свойств решений разностных уравнений естественно приводит к задаче исследования связей между аналитическими решениями разностных уравнений и специальными функциями математической физики.

Цель работы. Целью настоящей работы является: изучение определенного класса преобразований разностных уравнений с постоянными коэффициентами; выявление групповой структуры этих преобразований; исследование действий групп преобразований на решении разностных уравнений; изучение преобразований, связывающих устойчивый и неустойчивый (слабо устойчивый) и явный и неявный двухслойные разностные операторы; исследование связей решений разностных уравнений с гипергеометрическими функциями; выявление внутренних связей преобразований разностных уравнений с преобразованиями гипергеометрических функций; получение аналитических решений ряда разностных краевых задач.

Общая методика исследования. При получении теоретических и практических результатов были использованы теория разностных схем, элементы функционального анализа и теории представлений групп, элементы теории специальных функций.

Научная новизна. Новым в диссертации являются: групповая структура преобразований разностных операторов и решений разностных уравнений; классы подобных разностных операторов с постоянными коэффициентами и условие подобия разностных краевых задач; теоремы о преобразовании фундаментальных решений разностных уравнений, о преобразовании неустойчивых разностных схем в устойчивые, о связи явных и неявных разностных операторов; связь решений двухслойных разностных уравнений с постоянными коэффициентами с гипергеометрической функцией; связь преобразований разностных операторов с преобразованиями гипергеометрических функций; применение результатов при практических расчетах с помощью слабо устойчивых разностных схем; представление решений разностных краевых задач в виде ряда с коэффициентами, выражающимися через гипергеометрические функции.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы в различных теоретических и практических исследованиях в теории разностных схем, в частности, для проведения расчетов в рациональной арифметике; для сведения неустойчивого вычислительного процесса к устойчивому при численных расчетах условно-корректных задач математической физики.

Апробация работы. Результаты проведенных исследований докладывались на научно-исследовательском семинаре кафедры вычислительных методов механики сплошной среды Новосибирского университета (1976г.), на III Республиканском семинаре "Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью" (Томск, 1977г.), теоретическом семинаре и семинаре отдела прикладной гидродинамики в институте Гидродинамики СО АН СССР (г.Новосибирск, 1978г., 1980г.), на семинаре по численным методам механики сплошной среды в ИТПМ СО АН СССР, руководимым академиком Н.Н.Яненко (г.Новосибирск, 1978г.), на семинаре кафедры аэротермохимии в Томском Госуниверситете, под руководством А.М.Гришина (1978г.), на семинаре под руководством А.В.Гулина в ИПМ им.В.М.Келдыша АН СССР (1979г.), на Всесоюзной конференции по механике сплошной среды (г.Ташкент, 1979г.), на семинаре "Дифференциальные уравнения" в ИМ СО АН СССР, руководимым академиком С.Л.Соболевым (1980г.).

Публикации. По теме диссертации имеется десять публикаций.

Объем работы. Диссертация состоит из развернутого введения, трех глав, заключения. Работа содержит 120 стр. машинописного текста. Список литературы включает 60 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В введении дан краткий анализ литературы по проблеме преобразования решений разностных уравнений и их групповой структуре. Изучение групповых свойств дифференциальных уравнений оказало стимулирующее влияние на развитие теории дифференциальных уравнений. Групповой анализ разностных уравнений развит слабо. В то же время преобразования решений разностных уравнений находят широкое применение при исследовании разностных схем. В отмеченных работах исследованы вопросы группового анализа и аналитических решений разностных уравнений. Можно выделить два подхода к исследованию групповых свойств разностных уравнений: с позиций дифференциальных приближений и подход к разностным уравнениям, как самостоятельным объектам исследования. Если можн отметить отдельные работы, посвященные разностным уравнениям - аналогам обыкновенных дифференциальных уравнений , то существует значительный пробел в исследовании в духе второго подхода разностных уравнений-аналогов дифференциальных уравнений математической физики. Слабо развит подход к аналитическим решениям разностных уравнений с позиций теории специальных функций.

В настоящей работе исследуется групповая структура определенного класса преобразований разностных операторов с постоянными коэффициентами и действие групп преобразований на решении разностных уравнений. Исследуются преобразования, связывающие явный и неявный двухслойные разностные операторы с весами. Устанавливается связь аналитических решений разностных операторов с гипергеометрическими функциями. Обсуждается возможность практического использования полученных результатов.

Интерес к преобразованиям, связывающим различные разностные схемы, объясняется тем, что при практическом использовании слабо устойчивых разностных схем приходится получать на ЭВМ решения этих схем - неограниченно растущие функции. Поэтому использование слабо устойчивых схем ограничено возможностями ЭВМ.

В первой главе диссертации изучается групповая структура в пространстве разностных операторов с постоянными коэффициентами и устанавливается связь этих операторов-аналогов дифференциальных операторов математической физики с группой SL_2 - унимодулярных матриц второго порядка.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$ введем целочисленную решетку Z^{N+1}. Под m будем понимать точку в Z^{N+1}, связанную с $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ посредством соотношений $x_j = m_j h_j$, $h_j > 0$, $0 \leq j \leq N$. U - пространство функций u_m, заданных на Z^{N+1}, со скалярным произведением (u_m, v_m) и нормой $\|u_m\| = (u_m, u_m)^{1/2}$.
Пусть E_j - оператор сдвига по j-й переменной m_j, $j = 0, 1, \ldots, N$. $E_j u_{m_j} = u_{m_j+1}$. Положим $E^{\alpha} = E_0^{\alpha_0} E_1^{\alpha_1} \ldots E_N^{\alpha_N}$, $\alpha \in Z^{N+1}$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ пространство, элементами которого являются функции от оператора сдвига

$$R = \sum_{\ell=-p}^{q} c_\ell E^\ell ; \quad \ell, p, q \in Z^{N+1}, \quad p_j > 0, \, q_j \geq 0, \, 0 \leq j \leq N, \; c_\ell \in \mathbb{C}.$$

Через $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}$ обозначим пространство двухслойных разностных операторов $(p_0 = 0, q_0 = 1)$.

Рассмотрим группу G прямых произведений групп SL_2, элементы которой имеют вид

$$g = \bigoplus_{j=0}^{N} d_j, \quad d_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix} \in SL_2, \quad \alpha_j \delta_j - \beta_j \gamma_j = 1; \; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}^{N+1}.$$

Представление $T(g)$ группы G в пространстве $\mathfrak{H}$ определим следующим образом

$$T(g) R = R_g = E^{-p} \sum_{\ell=-p}^{q} c_\ell \prod_{j=0}^{N} (\alpha_j E_j + \gamma_j I)^{p_j+\ell_j} (\beta_j E_j + \delta_j I)^{q_j-\ell_j}$$

Очевидно, что $T(g_1) T(g_2) = T(g_1 g_2)$. Задание действия группы G определяет на $\mathfrak{H}$ групповую структуру.

Обозначим через $\Omega \in G$ диагональную подгруппу, элементы которой имеют вид

$$\omega(\mu) = \bigoplus_{j=0}^{N} \omega_j = \bigoplus_j \begin{pmatrix} e^{\mu_j/2} & 0 \\ 0 & e^{-\mu_j/2} \end{pmatrix}, \; e^{\mu} \in \mathbb{C}^{N+1},$$

а через $\Pi : U \to U$ - оператор умножения на функцию $e^{\frac{1}{2}(\mu, m)} \in U$, где $(\mu, m) = \mu_0 m_0 + \mu_1 m_1 + \ldots + \mu_N m_N$.

ТЕОРЕМА. Орбиты действия подгруппы Ω в $\mathfrak{H}$ определяются соотношением

$$T(\Omega) R = R_\Omega = e^{\frac{1}{2}(\mu, p-q)} \Pi R \Pi^{-1}, \quad R \in \mathfrak{H}. \qquad (I)$$

Положим $\ker R = \{ u_m \in U \mid R u_m = 0 \}$.

СЛЕДСТВИЕ. В пространстве ядер $\bigcup_{R \in \mathfrak{H}} \ker R$ справедливо соотношение

$$\ker R_\Omega = \Pi_\Omega \ker R. \tag{2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разностные операторы называются подобными, если они связаны преобразованием (I), которое назовем преобразованием подобия.

Соотношение (2) позволяет, зная решение одного разностного уравнения, получать решения разностных уравнений, операторы которых связаны соотношением (I), в этом смысле мы сводим изучение всего класса подобных разностных операторов к изучению одного разностного оператора.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{H}_2$ двухслойных разностных операторов, представленных в виде

$$R = R(A_0, A_1) = E_0 - I + A_1(\tau, h, E')E_0 + A_0(\tau, h, E'), \quad E' = E E_0^{-1}.$$

Здесь E_0 – оператор сдвига по временной переменной $x_0 = t$, $h_0 = \tau$, $m_0 = n$, $m = (m_1, \dots, m_N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разностный оператор $R \in \mathfrak{H}_2$ называется разрешимым, если существует обратный оператор $[I + A_1(\tau, h, E')]^{-1}$.

ЛЕММА. Ω – орбита разрешимого оператора $R \in \mathfrak{H}_2$ суть разрешимые операторы.

Из подобия операторов $R_1 \in \mathfrak{H}_2$ и $R_2 \in \mathfrak{H}_2$ следует подобие задач Коши для этих операторов, если начальные значения φ_1 и φ_2 этих задач связаны соотношением $\varphi_1 = e^{-(\mu, m)}\varphi_2$. Следовательно, зная решение u_1 задачи Коши для оператора R_1, решение подобной задачи Коши для оператора R_2 находим как соответствующее преобразование функции u_1: $u_2 = \Pi^{-1} u_1$.

Будем называть разностный оператор R устойчивым в U, если устойчива соответствующая задача Коши.

ТЕОРЕМА. Каждый элемент Ω – орбиты фундаментального решения задачи Коши для разрешимого оператора $R \in \mathfrak{H}_2$ является фундаментальным решением задачи Коши оператора $R_\omega \in R_\Omega$.

Рассмотрим множество $M \subset \mathfrak{H}_2$ двухслойных разностных операторов с весами $R_\sigma^A = R(\nu A, \sigma A)$, $\nu = 1 - \sigma$, $-\infty < \sigma < \infty$, таких, что $\Pi A \Pi^{-1} = cB + bI$, $B \in \mathfrak{H}$, $c(\mu)$, $b(\mu)$ – – постоянные.

ЛЕММА. Разностный оператор $R_\omega \in R_\Omega$ принадлежит M, если и только если

$$e^{\mu_0} = (1 - \nu b)(1 + \sigma b)^{-1}.$$

Выделим класс разностных операторов с весами, преобразование подобия которых порождает алгебраическую связь между устойчивым и неустойчивым операторами (в энергетических сеточных пространствах U_A, $U_{A'}$).

ТЕОРЕМА. Пусть оператор A является самосопряженным и положительным и $\sigma > -\|A\|^{-1}$. Если существует такое $\mu = \eta$, что

$$\Pi A \Pi^{-1} = -A + \|A\| I, \quad e^{\eta_0} = (1 - \nu\|A\|)(1 + \sigma\|A\|)^{-1},$$

где Π — оператор умножения на функцию $e^{-\eta_0 n - (\eta, m)}$, то соотношение

$$R_{\sigma'}^{A'} = c\,\Pi R_{\sigma}^{A} \Pi^{-1}, \quad \sigma' = \sigma(1 - \nu\|A\|), \quad A' = -\frac{\sigma\nu}{\sigma'\nu'} A$$

определяет представление неустойчивого в $U_{A'}$ оператора $R_{\sigma'}^{A'}$ через устойчивый в U_A оператор R_{σ}^{A} внутри области устойчивости $\|A\|(1 - 2\sigma) < 2$.

Рассмотрим множество M операторов R_{σ}^{A} с оператором A вида

$$A = \hat{A} = -\sum_{j=1}^{N} æ_j \sum_{k=-p_j}^{q_j} a_{kj} \left(E_j^k - I\right), \quad a_{kj} \neq a_{kj}(æ)$$

Оператор $\Pi \hat{A} \Pi^{-1}$ допускает представление

$$\Pi \hat{A} \Pi^{-1} = -\sum_{j=1}^{N} æ_j \sum_{k=-p_j}^{q_j} a_{kj} e^{\mu_j k} (E_j^k - I) - \sum_{j=1}^{N} æ_j \sum_{k=-p_j}^{q_j} a_{kj} (e^{\mu_j k} - 1) I .$$

Пусть $p_j = q_j = 1$, $j = 1, \dots, N$. При $\mu_j = \pm i\pi$ справедлива формула

$$\Pi \hat{A} \Pi^{-1} = -\hat{A} - 2\sum_{j=1}^{N} æ_j (a_{1j} + a_{-1j}) I ,$$

следовательно, в этом случае преобразование подобия оператора $R_{\sigma}^{\hat{A}}$ является инвариантным с точностью до постоянных σ и $a\hat{A}$.

Приводится ряд примеров, которые иллюстрируют полученные результаты.

Подробно исследуются преобразования подобия разностного аналога оператора теплопроводности. Формулируются теоремы, которые устанавливают подобие между разностными аппроксимациями дифференциальных уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов.

Рассматриваются преобразования, связывающие два произвольных оператора из M.

ТЕОРЕМА. Пара операторов $R = R(A_0, A_1)$, $\mathcal{R} = R(B_0, B_1)$; $R, \mathcal{R} \in M$, связана преобразованием

$$\mathcal{R} = (I - B_0) P (I - A_0)^{-1} Q P^{-1}, \qquad (3)$$

где оператор $P = (I + B_1)^{-n} (I - B_0)^{n} (I - A_0)^{-n} (I + A_1)^{n}$.

СЛЕДСТВИЕ. Каждой функции $u \in \ker R$ соответствует функция $v \in \ker \mathcal{R}$, такая, что

$$v = P u.$$

Устанавливается групповая структура преобразований (3) и связь с преобразованиями подобия.

Во второй главе изучаются аналитические решения двухслойных разностных схем, связь этих решений с гипергеометрической функцией и действие групп преобразований, рассмотренных в I главе на эти решения.

Установлено, что оператор перехода $Q(n)$ эволюционной двухслойной разностной схемы с постоянными коэффициентами выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса, в общем случае операторного аргумента. Для разностных схем с весами R_6^n аргумент – вещественное число.

$$Q(n) = I + n \sum_{k=1}^{\infty} F(1-k, 1-n, 2; 6^{-1}) 6^{k-1} (-A)^k, \quad \|A\| < |6|^{-1}.$$

Для определенных классов разностных операторов получены в явном виде фундаментальные решения задач Коши, и установлена их связь с гипергеометрическими функциями. Показано, что подобие разностных операторов существенно облегчает построение фундаментальных решений (формула 2). Исследованы асимптотические свойства некоторых фундаментальных решений в частности, фундаментального решения разностного аналога уравнений одномерной акустики (схема С.К.Годунова).

В качестве примера рассматривается смешанная задача на сетке $D_h = (x = mh,\ y = nh)$ в квадранте $n > 0$, $m > 0$ для явного разностного оператора

$$R = E_0 - I - (\sigma E_0 + \gamma I) \sum_{j=1,2} \varkappa_j \sum_{k=\pm 1} a_{kj} (E_j^k - I), \qquad m = (m_1, m_2).$$

Ищется функция u_m^n, удовлетворяющая в области уравнению $R u_m^n = f_m^n$ и принимающая на границе квадранта заданные значения. Получено явное (аналитическое) представление решений этой задачи.

Изучается связь преобразований разностных уравнений с преобразованиями гипергеометрических функций. Установлено, что орбиты разностных операторов, порождают преобразования (линейные, квадратичные и т.д.) гипергеометрических функций.

Этот результат дает групповую трактовку рассмотренных преобразований гипергеометрических функций.

Показано, что преобразования, связывающие явный и неявный операторы, приводят к многочисленным формулам преобразований гипергеометрических функций.

Обсуждается вопрос практического использования результатов первой и второй главы при решении задач математической физики. На примере разностного аналога уравнения одномерной теплопроводности показывается, что оценка целесообразности использования разностного аналитического решения должна проводиться особо в каждом конкретном случае.

Устанавливается возможность практического применения преобразований, связывающих устойчивый и неустойчивый операторы на основе предложенного Жуковым А.И. метода численного интегрирования задачи Коши с использованием неустойчивых разностных схем. Он установил принципиальную возможность применения неустойчивых разностных схем для численного решения задачи Коши и показал, что, исходя из решения неустойчивой разностной схемы, можно получить хорошее приближение к решению дифференциальной задачи Коши. Этот подход в дальнейшем развивал Н.Н.Кузнецов.

В диссертации предлагается численно-аналитический алгоритм решения обратных задач теплопроводности, основанный на методике Жукова А.И. и преобразовании устойчивость-неустойчивость. С помощью этого алгоритма решалась одномерная задача восстановления распределения температуры в момент времени $t=0$ в однородном бесконечном стержне по известному распределению температуры в момент времени $t=T>0$. Проведен численный анализ устойчивости алгоритма к случайным погрешностям в исходных данных. Применение преобразования устойчивость-неустойчивость позволило избежать в процессе реализации алгоритма выхода чисел за разрядную сетку ЭВМ.

<u>В третьей главе</u> даны приложения аналитических решений разностных уравнений с постоянными коэффициентами к решению следующей краевой задачи

$$\operatorname{div} V = q(x,y), \qquad \operatorname{rot} V = \omega(x,y), \quad (x,y)\in D,$$

$$\operatorname{Re} V(x,y)\big|_{\Gamma_1} = u^0(s), \quad \operatorname{Im} V(x,y)\big|_{\Gamma_2} = v^0(s),$$

где $q(x,y)$, $\omega(x,y)$ – известные функции, $\operatorname{div}\omega = 0$, $\mathcal{D} = (0 < x < l_1, 0 < y < l_0)$ – прямоугольник в R^2, граница которого $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_1 = (0 \leq x \leq l_1, y = 0, l_0)$, $\Gamma_2 = (0 \leq y \leq l_0, x = 0, l_1)$.
При определенных условиях эта задача эквивалентна задаче Дирихле для уравнения Пуассона. Будем искать численное решение задачи с помощью разностной схемы второго порядка аппроксимации

$$RV_m^n = V_{m+1}^{n+1} - V_m^n - i\left(V_{m+1}^{n} - V_m^{n+1}\right) = \Omega_{m,n}, \quad \Omega_{m,n} = h(1-i)(\omega + iq)_{m,n} \tag{4}$$

на квадратной сетке в $\mathcal{D}$. Приводится оценка собственных чисел оператора R. Получено аналитическое решение смешанной задачи в квадранте $n > 0$, $m > 0$. Внутри квадранта решение удовлетворяет уравнению (4), а на границе квадранта принимает заданные значения V_0^n, V_m^0.

Решение записывается в виде ряда по параметрам V_0^n, V_m^0, коэффициенты ряда являются точными целыми числами, которые определяются через гипергеометрическую функцию Гаусса в виде конечного ряда. Дается асимптотическая оценка коэффициентов ряда, которые растут как $\approx n^{-1/2}(5.8)^n$. Применяя аналитическое решение смешанной задачи в сеточном квадранте к решению краевой задачи в сеточном прямоугольнике, удается исключить из заданной системы разностных уравнений неизвестные во внутренних узлах прямоугольника, этим исходная краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений компонент искомой комплексной функции V_m^n на границе сеточного квадранта. Так как коэффициенты системы – точные целые числа, эта система может быть решена точно (в классе рациональных чисел). В этом случае процесс численного решения разностной краевой задачи не вносит какой-либо дополнительной погрешности по отношению к погрешности аппроксимации исходной дифференциальной задачи. Проводится численная апробация метода на модельных краевых задачах, типа Неймана и Дирихле при наличии в области изолированных вихрей. Сравнение с точными решениями дифференциальных задач подтверждает теоретические оценки. Проводится оценка числа арифметических действий $O(h^{-3})$, необходимых для численного решения краевой задачи. Показано, что при определенных условиях эта оценка имеет порядок $O(h^{-2})$.

Приводится модификация метода, основанная на разбиении области решения, с дальнейшим сшиванием части компонент решения по границам подобластей. При этом проблема многоразрядных целых чисел не возникает, а процесс получения граничных условий для подобластей сводится к численному процессу типа матричной прогонки.

В заключении сформулированы основные результаты работы, которые сводятся к следующему:

I. Развит аппарат группового анализа применительно к разностным схемам-аналогам дифференциальных уравнений математической физики.

2. Сформулированы теоремы о преобразованиях фундаментальных решений разностных уравнений; о преобразовании неустойчивых разностных схем в устойчивые.

3. Установлена связь решений разностных уравнений с постоянными коэффициентами с гипергеометрическими функциями; показана связь преобразований разностных операторов с преобразованиями гипергеометрических функций.

4. Указана возможность применения полученных теоретических результатов к решению некорректных разностных задач; разработан численно-аналитический алгоритм решения обратных задач теплопроводности.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

I. Коробицын В.А., Либин Э.Е. О точном решении некоторых разностных задач. – Докл. АН СССР, 1977, т.235, № 4, с.764–767.

2. Коробицын В.А., Сидонский О.Б. Разностный оператор на группе над матричным кольцом. – Докл. АН СССР, 1978, т.243, № 4, с.847–850.

3. Коробицын В.А., Либин Э.Е. О точном решении разностной задачи Коши. – Дифференциальные уравнения, 1978, т.I4, № 2, с.364–365.

4. Коробицын В.А. Группа SL_2 и разностные операторы. – Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, Б.и., 1979, т.I0, № 6, с.53–62.

5. Коробицын В.А., Либин Э.Е. Точное решение разностной задачи Коши и решение краевых задач. – Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, Б.И., 1977, т.8, № 4, с.77–86.

6. Коробицын В.А., Сидонский О.Б. Разностный оператор на группе над матричным кольцом. Тезисы доклада. – Численные

методы механики сплошной среды, Новосибирск, Б.и., 1978, т.9, № 4, с.151.

7. Коробицын В.А., Либин Э.Е. О точных решениях двух и трехслойных разностных схем. - В сб. "Динамика упругих и твердых тел взаимодействующих с жидкостью. Труды III семинара". Томск:, изд-во ТГУ, 1978, с.72-77.

8. Коробицын В.А. Разностный оператор на группе и гипергеометрическая функция. Тезисы доклада. - Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1979, № 3, с.175.

9. Коробицын В.А. Теоретико-групповой подход к численному решению краевых задач. - Всесоюзная конференция по механике сплошных сред, Ташкент, 16-18 мая 1979г., аннотация докладов", Ташкент:, изд-во Фан, 1979, с.76.

10. Коробицын В.А. Преобразования разностных операторов.- Докл. АН СССР, 1980, т.253, № 2.

КЗ 02082. ПОДПИСАНО К ПЕЧАТИ 3/7-1980г.
БУМАГА ТИПОГРАФСКАЯ № 2. ФОРМАТ 60x84 1/16
П.Л. 1 УЧ.-ИЗД.Л. 0,9 ЗАКАЗ 407. ТИРАЖ 100.

РОТАПРИНТ ТГУ. ТОМСК, 29. НИКИТИНА, 17