АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

ШОКИН Юрий Иванович

АНАЛИЗ СВОЙСТВ И КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

01.01.07 - вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск, 1980

етической и прикладной
наук СССР.

Завьялов,
Куропатенко,
доктор физико-математических наук, профессор Б.Л.Рождественский.

Ведущее предприятие:
Московский ордена Трудового Красного Знамени физико-технический институт.

Защита состоится "___"_________ 1980 г. в _____ часов на заседании Специализированного совета Д 002.10.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Вычислительном центре СО АН СССР по адресу: 630090, Новосибирск-90, проспект Науки, 6, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ СО АН СССР.

Автореферат разослан "___"_________ 1980 г.

Ученый секретарь Специализированного совета
доктор физико-математических наук,
профессор В.Г.Романов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена построению, анализу свойств и классификации разностных схем методом дифференциального приближения.

Целью диссертации является разработка методов анализа свойств, классификации и способов построения разностных схем с заданными свойствами для гиперболических систем уравнений, в частности, для уравнений газовой динамики, с позиций единого методологического подхода на основе дифференциальных приближений разностных схем.

Актуальность проблемы исследований определяется ее направленностью на разработку теории и создание новых численных алгоритмов для решения важных задач механики сплошной среды, в частности, задач газовой динамики. Результаты диссертации получены при выполнении планов научно-исследовательских работ ИТПМ СО АН СССР по постановлениям Президиума АН СССР (№ 10103-306 от 20.02.76) и ГКНТ СССР (№ 500 от 21.11.75): тема "Методы решения задач механики сплошной среды" (номер государственной регистрации 76051920), тема "Численное моделирование процессов генерации и распространения цунами при подводном землетрясении" (номер государственной регистрации 77054854).

Краткие библиографические сведения и методическая характеристика работы. Практика решения различных задач прикладной математики показывает, что без создания новых методов вычислительной математики нельзя получить решения многих классов важных прикладных задач. В СССР и за рубежом уделяется большое внимание разработке эффективных конечно-разностных алгоритмов, а также созданию методов анализа существующих и вновь создаваемых разностных схем. Эти исследования содержатся в работах таких крупных советских математиков, как Г.И.Марчук, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов, Н.Н.Яненко, О.М.Белоцерковский, К.И.Бабенко, С.К.Годунов, В.В.Русанов.

Появление и практическое использование большого количества разностных схем при численном моделировании различных задач науки и техники привело к повышению роли критериев отбора и сравнения схем.

Настоящая диссертация посвящена построению, анализу свойств и классификации разностных схем методом дифференциального приближения. Этот метод нашел в настоящее время широкое применение и эффективность его подтверждена практикой. Возможность использования дифференциальных приближений при исследовании разностных схем впервые была указана в 50-х годах А.И.Жуковым для случая простейшего уравнения переноса с постоянными коэффициентами. В 1968 году в работах автора и Н.Н.Яненко было сформулировано понятие первого дифференциального приближения (п.д.п.) для произвольной разностной схемы с постоянными коэффициентами и доказаны теоремы о связи устойчивости простых и мажорантных схем и корректности их п.д.п. для гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка. Впоследствии идея использования дифференциальных приближений при анализе свойств схем получила широкое развитие в исследованиях автора и Н.Н.Яненко, а также в исследованиях других советских и зарубежных математиков. Метод дифференциального приближения позволяет строить новые разностные схемы с заранее определенными свойствами, проводить анализ разностных схем, сравнивать их между собой, а также классифицировать по определенным признакам.

Литература по методу дифференциального приближения насчитывает в настоящее время около 150 наименований. Большинство результатов этих исследований носит эвристический характер и правильность их подтверждена многочисленными расчетами. Теоремы о связи устойчивости разностных схем и свойств п.д.п. в случае гиперболических систем уравнений доказаны автором и Н.Н.Яненко. Устойчивость разностных схем исследуется методом дифференциального приближения в работах автора, Н.Н.Яненко и их учеников, Н.Н.Анучиной, О.М.Белоцерковского и Ю.М.Давыдова, Т.Харлоу, Ц.Хирта и др. Метод дифференциального приближения оказался весьма полезным и работоспособным при анализе дисперсионных и диссипативных свойств разностных схем. Особенно это видно при исследовании свойств разностных схем методов типа "частиц в ячейке" в работах Н.Н.Анучиной, В.Е.Петренко, Н.Н.Яненко и автора, О.М.Белоцерковского, Ю.М.Давыдова и их учеников, Т.Харлоу и его учеников. На основе дифференциальных приближений в исследованиях Н.Н.Яненко и его учеников развита методика дифференциального анализатора, нашедшего применение при локализации скачков в разностных решениях. Автором, Н.Н.Яненко и А.И.Урусовым предложен метод построения разностных схем на произвольной сетке на основе разностной схемы, заданной на равномерной сетке, основанный на анализе дифференциальных приближений схем. Ан.Г.Марчуком, З.И.Федотовой и автором исследован вопрос о связи свойств п.д.п. и свойства полной консервативности разностных схем в смысле А.А.Самарского - Ю.П.Попова. В работах автора и Н.Н.Яненко введено понятие инвариантных разностных схем, то есть разностных схем, п.д.п. которых допускает некоторую группу преобразований. Практика расчетов показывает, что неинвариантность разностных схем относительно группы преобразований, допускаемых исходной системой дифференциальных уравнений, приводит к нежелательным счетным эффектам, существенно искажающим картину изучаемого физического явления. Автором получено необходимое и достаточное условие инвариантности разностных схем в терминах п.д.п., совместно с Н.Н.Яненко построены классы инвариантных разностных схем для уравнений одномерной и двумерной газовой динамики, результаты расчетов по которым приведены в работах автора, Н.Н.Яненко и З.И.Федотовой. Б.И.Леви, Я.М.Зайделем, В.М.Санкиным продемонстрирована важность использования инвариантных разностных схем при численном моделировании задач фильтрации.

Основными результатами диссертации являются:

I. Развитие и обоснование метода дифференциального приближения для анализа свойств, классификации и способов построения разностных схем с заданными свойствами для гиперболических систем уравнений.

2. Создание теории инвариантных разностных схем, в частности, инвариантных разностных схем для уравнений газовой динамики.

3. Разработка методов анализа устойчивости, диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем с помощью дифференциальных приближений.

4. Применение полученных теоретических результатов к построению и исследованию конкретных разностных схем задач газовой динамики и для классификации разностных схем одномерной системы уравнений газовой динамики, которая была использована при численном решении прикладных газодинамических задач в Вычислительном центре СО АН СССР (г.Красноярск) и при разработке специализированного пакета программ.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на:

I) семинарах Вычислительного центра СО АН СССР,

2) семинарах кафедры вычислительных методов механики сплошной среды Новосибирского государственного университета,

3) семинарах Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР,

4) семинарах Института гидродинамики СО АН СССР,

5) семинаре Института математики СО АН СССР,

6) семинарах факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета,

7) семинаре Института прикладной математики АН СССР,

8) семинаре Московского физико-технического института,

9) семинаре Красноярского государственного университета,

I0) Всесоюзном семинаре по аналитическим методам газовой динамики,

II) Всесоюзных семинарах по численным методам механики вязкой жидкости,

I2) XШ Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике,

I3) семинарах ВЦ СО АН СССР - ИРИА Франция,

I4) Советско-Чехословацком совещании по применению функциональных методов к краевым задачам математической физики,

I5) I-УI Международных конференциях по численным методам динамики жидкости,

I6) конференциях и семинарах в США, ФРГ, Франции, Швеции, Польше и Чехословакии.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [I] - [43] (монография [I6] содержит большую часть из них).

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, трех приложений, содержит 86 рисунков, I3 таблиц. Библиография насчитывает 273 наименования. Объем диссертации - 375 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан обзор исследований по методу дифференциального приближения и кратко изложено содержание диссертации.

Первая глава состоит из семи параграфов и посвящена исследованию устойчивости разностных схем методом дифференциального приближения для гиперболических систем уравнений.

В первом параграфе приведены некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений и теории разностных схем, требуемые для последующего изложения.

Во втором параграфе введены понятия дифференциального представления и дифференциального приближения разностных схем, которые сформулируем и здесь.

Пусть разностная схема

$$\Lambda_1 u^{n+1}(x) = \Lambda_0 u^n(x) \tag{I}$$

аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u. \tag{2}$$

Здесь оператор Λ_1 обратим, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t,x,D)$, $\Lambda_k = \Lambda_k(t,x,\tau,h,T)$ $(k=0,1)$, $D = \frac{\partial}{\partial x} = \{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_s}\}$, $T = \{T_1,\dots,T_s\}$, $x = \{x_1,\dots,x_s\} \in R_s$, $h = \{h_1,\dots,h_s\}$, $t = n\tau$, τ – шаг по оси t, h_j – шаг по оси x_j, T_j – оператор сдвига по оси x_j $(j = 1,\dots,s)$.

При аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой мы совершаем переход от бесконечномерного пространства функций непрерывного аргумента к конечномерному пространству сеточных функций и сведение уравнений для функции непрерывного аргумента к алгебраическим соотношениям. Такое рассмотрение, удобное на практике, вызывает трудности при теоретическом анализе свойств разностных схем, так как сеточная функция и функция непрерывного аргумента определены в разных пространствах. При теоретическом исследовании разностных схем зачастую удобно рассматривать разностные операторы в том же функциональном пространстве, что и аппроксимируемые ими дифференциальные операторы. В этом случае считают, что разностные схемы удовлетворяются функциями непрерывного аргумента в каждой точке рассматриваемой области (см. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М., Наука, 1978). Мы придерживаемся именно такого подхода.

Известны следующие операторные представления: $T_j = \exp h_j D_j = \exp h_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{l=0}^{\infty} h_j^l D_j^l/(l!)$ $(j=1,\dots,s)$, $T_0 = \exp \tau D_0 = \exp \tau \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{l=0}^{\infty} \tau^l D_0^l/(l!)$, $\ln(\exp \tau D_0) = \tau D_0$, T_0 – оператор сдвига по оси t. Тогда разностную схему (I) можно представить в виде

$$e^{\tau\frac{\partial}{\partial t}}u = \Lambda_1^{-1}(t,x,\tau,h,e^{hD})\Lambda_0(t,x,\tau,h,e^{hD})\,u,$$

где $\exp hD = \{\exp h_1 D_1, \ldots, \exp h_s D_s\}$ и, в силу аппроксимации, получим

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\tau^{l-1}}{l!}\frac{\partial^l u}{\partial t^l} = \mathcal{L}u + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{l_1+\cdots+l_s=1}^{l}\alpha_{l_1\ldots l_s}\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_s^{l_s}}, \quad (3)$$

где $\alpha_{l_1\ldots l_s}$ – коэффициенты, зависящие от t, x, τ, h. Уравнение (3) называется Γ – формой дифференциального представления разностной схемы (I). Дифференциальное представление разностной схемы чаще рассматривают в другой форме, а именно, в Π – форме, которая получается из Γ – формы заменой производных $\partial^l u/\partial t^l$ $(l \geq 2)$ через производные по x, используя саму Γ – форму дифференциального представления. Из уравнения (3) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\ln\Big\{E + \Big[\mathcal{L} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{l_1+\cdots+l_s=1}^{l}\alpha_{l_1\ldots l_s}\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_s^{l_s}}\Big]\Big\}u =$$

$$= \mathcal{L}u + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{l_1+\cdots+l_s=1}^{l}c_{l_1\ldots l_s}\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_s^{l_s}}, \quad (4)$$

где $c_{l_1\ldots l_s}$ – коэффициенты, зависящие от t, x, τ, h, E – тождественный оператор. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{l_1+\cdots+l_s=1}^{l}c_{l_1\ldots l_s}\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_s^{l_s}}$$

называется Π – формой дифференциального представления разностной схемы (I).

Указанный формальный способ построения Γ – формы и Π – формы дифференциального представления разностной схемы на практике можно выполнить следующим образом. Сделаем это на примере разностной схемы

$$u^{n+1}(x) = \Lambda(t,x,\tau,h,T_0,T)\,u^n(x), \quad (5)$$

аппроксимирующей уравнение (2) с порядком γ, причем, предположим, что $h = h(\tau)$. В общем случае процесс выполняется аналогично. Разлагая в разностной схеме (5) функции вида $u^{n+\alpha}(x_1+\beta_1 h_1, \ldots, x_s+\beta_s h_s)$, где $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s$ – некоторые числа, в ряд по параметрам τ, h_j, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bar{\mathcal{L}}(t, x, \tau, h, D_0, D)u = \mathcal{L}^1(t, x, \tau, h, D_0, D)u + R, \tag{6}$$

где $\mathcal{L}^1 u = \mathcal{L}u + \tau P_1(t, x, D_0, D)u + \cdots + \tau^{\gamma} P_{\gamma}(t, x, D_0, D)u$, $R = \sum_{l>\gamma} \tau^l P_l(t, x, D_0, D)u$. Уравнение (6) есть Γ – форма дифференциального представления разностной схемы (5). Π – форма дифференциального представления

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{\mathcal{L}}(t, x, \tau, h, D)u$$

разностной схемы (5) получается из Γ – формы (6) заменой в правой части уравнения (6) производных по t и смешанных производных по t и x производными по x, используя Γ -форму дифференциального представления.

В работе дан алгоритм получения Π – формы дифференциального представления. Для разностных схем, используемых на практике при аппроксимации уравнения переноса с постоянными коэффициентами, даны рекуррентные формулы для коэффициентов Π -формы дифференциального представления.

Предположим, что разностная схема (I) имеет порядки аппроксимации γ_1 и γ_2 по t и x соответственно. Тогда, отбрасывая в уравнении (3) члены $O(\tau^{\gamma_1+1}, h^{\gamma_2+1})$, получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cdots + \frac{\tau^{\gamma_1}}{(\gamma_1+1)!}\frac{\partial^{\gamma_1} u}{\partial t^{\gamma_1}} = \mathcal{L}u + \mathcal{L}_1(D)u, \tag{7}$$

где $\mathcal{L}_1(D)$ – некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого имеют порядки $O(\tau, \ldots, \tau^{\gamma_1}, h, \ldots, h^{\gamma_2})$, которое называется Γ – формой первого дифференциального приближения (п.д.п.) разностной схемы (I). Если в Π – форме дифференциального представления (4) отбросить члены порядка $O(\tau^{\gamma_1+1}, h^{\gamma_2+1})$, то получим Π – форму п.д.п.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u + \tilde{\mathcal{L}}_1(D)u. \tag{8}$$

Здесь $\tilde{\mathcal{X}}_1(D)$ – некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого имеют порядки $O(\tau^{\gamma_1}, h^{\gamma_2})$. В случае разностной схемы (5) Γ – форма п.д.п. имеет вид: $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{X}^1 u$, а Π – форма п.д.п. – $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{X} u + \tau^{\gamma} P_{\gamma}(t, x, D) u$.
Нетрудно видеть, что Π – форма п.д.п. (8) разностной схемы (I) получается из Γ – формы п.д.п. (7) в силу аппроксимации формальной заменой производных по t до порядка γ_1 через производные по x, используя исходное дифференциальное уравнение.

Отбрасывая в уравнении (4) члены порядка $O(\tau^{\gamma_1+2}, h^{\gamma_2+2})$, $O(\tau^{\gamma_1+3}, h^{\gamma_2+3})$ и т.д., получим соответственно Π -формы второго, третьего и т.д. дифференциальных приближений. Аналогично определяются Γ – формы второго, третьего и последующих дифференциальных приближений.

В дальнейшем, где не оговорено особо, под дифференциальным представлением и п.д.п. разностной схемы будем понимать Π – форму дифференциального представления и Π – форму п.д.п.

Далее во втором параграфе исследован вопрос о корректности рассмотрения Π – формы дифференциального представления.

В третьем параграфе разностные схемы и их дифференциальные представления рассмотрены в пространствах обобщенных функций. Доказано, что решения задач Коши для разностной схемы и дифференциального представления совпадают и всегда можно указать такое пространство обобщенных функций, в котором разностную схему можно представить в виде бесконечного дифференциального уравнения и решение задачи Коши для дифференциального приближения является асимптотическим приближением решения соответствующей задачи Коши для разностной схемы в пространстве быстро убывающих функций вещественного аргумента.

В четвертом параграфе дано необходимое условие устойчивости двухслойных разностных схем для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в терминах первого четного по порядку производной дифференциального приближения схемы.

В пятом параграфе для простых и мажорантных схем, а также простых и мажорантных схем расщепления с коэффициентами в виде симметрических и липшиц-непрерывных матриц доказана достаточность условий неполной параболичности п.д.п. для устойчивости указанных разностных схем. Показано использование Γ – формы п.д.п. при анализе устойчивости разностных схем.

В шестом параграфе выделен класс разностных схем, диссипативных в обобщенном смысле и применяемых в газодинамических расчетах. Для них и для разностных схем, диссипативных в смысле Рождественского-Яненко-Рихтмайера, доказаны теоремы устойчивости.

В седьмом параграфе изложен метод построения разностных схем повышенного порядка аппроксимации, использующий дифференциальные следствия исходного уравнения.

Вторая глава состоит из пяти параграфов и посвящена анализу аппроксимационной вязкости разностных схем методом дифференциального приближения.

В первом параграфе определены свойства $K_j^{(p,i)}$, $\mathcal{D}_j^{(p,i)}$, $P_j^{(p,i)}$ разностных схем p -го порядка аппроксимации для гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Эти свойства означают, что в j -ом дифференциальном приближении i -й инвариант не подвергается действию диссипации за счет аппроксимационной вязкости и подвергается дисперсии и дополнительному переносу вдоль j -ой характеристики. Для ряда классов схем найдены необходимые и достаточные условия, при которых схемы обладают свойством $K_j^{(p,i)}$. Для системы уравнений газовой динамики показано, как строить разностные схемы, обладающие свойством K, которое означает, что в п.д.п. на энтропию диссипация не действует.

Во втором параграфе дисперсия и диссипация разностной схемы определены в терминах Π-формы дифференциального представления. Дано определение дисперсии и диссипации дифференциального приближения, указаны условия отсутствия дисперсии и диссипации, а также условия, при которых дисперсия нормальная или аномальная. Показано, что эффекты диссипации разностных схем первого порядка аппроксимации проявляются более резко, чем у разностных схем второго порядка аппроксимации, а паразитические осцилляции схем второго порядка возникают из-за преобладания дисперсии над диссипацией. Для анализа свойств аппроксимационной вязкости использованы также понятия относительной диссипативной и относительной дисперсионной ошибок. Показана связь со свойствами $K_j^{(p,i)}$ и $\mathcal{D}_j^{(p,i)}$. Дана геометрическая иллюстрация диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем на примере наиболее встречаемых на практике трехточечных разностных схем. Указано выражение функционала невязки разностной схемы через дисперсию и диссипацию.

В третьем параграфе рассмотрен вопрос об исследовании эффектов нелинейных преобразований с помощью дифференциальных приближений. Введено понятие алгебраически эквивалентных разностных схем, найдены условия эквивалентности через п.д.п. Для системы уравнений газовой динамики рассмотрены три семейства разностных схем и для них найдены условия эквивалентности (в частности, условия эквивалентности консервативным разностным схемам) и наличия у них свойства К

В четвертом параграфе изучен один подход к оценке монотонности разностных схем на основе анализа дифференциального представления.

В пятом параграфе изложен метод построения разностных схем на произвольной сетке на основе разностной схемы, заданной на равномерной сетке в той же системе координат. Метод может быть использован при создании пакетов прикладных программ.

Третья глава состоит из семи параграфов и посвящена анализу инвариантных свойств разностных схем.

Известно, что уравнения газовой динамики инвариантны относительно некоторой группы точечных преобразований в пространстве независимых и зависимых переменных. Эта инвариантность является следствием инвариантности законов сохранения, из которых вытекают уравнения газовой динамики. В то же время любые критерии, предъявляемые к разностным схемам для уравнений газовой динамики, должны носить физически содержательный и, следовательно, инвариантный характер. Неинвариантность часто проявляется в расчетах особенностей потока. Хорошо известно, что один из главных источников неточностей расчета связан с отсутствием инвариантности разностной схемы относительно преобразований переноса и поворота.

Оказалось целесообразным проводить групповую классификацию разностных схем на основе их п.д.п. П.д.п., занимая промежуточное положение между исходными уравнениями и аппроксимирующей их разностной схемой, является дифференциальным уравнением и к нему может быть целиком применима групповая теория, разработанная Л.В.Овсянниковым. Следовательно, на основе понятия п.д.п.

можно дать групповую классификацию разностных схем.

Будем говорить, что разностная схема допускает некоторую группу преобразований (инвариантна относительно группы преобразований), если эту группу допускает ее п.д.п. В соответствии с этим все разностные схемы могут быть разделены на два класса: инвариантные и неинвариантные относительно группы, допускаемой исходной системой дифференциальных уравнений.

В первом и втором параграфах приведены необходимые сведения из теории групповых свойств дифференциальных уравнений и, в частности, уравнений газовой динамики.

В третьем параграфе доказано необходимое и достаточное условие инвариантности разностных схем в терминах п.д.п.

В четвертом параграфе найдены условия инвариантности двухслойных схем для одномерных уравнений газовой динамики. Выделены подклассы разностных схем, обладающих свойством K и свойством M (свойство выполнения закона сохранения массы в п.д.п.). Выделенные классы инвариантных схем полностью описываются выбором матрицы вязкости п.д.п. Рассмотрен вопрос о связи свойств инвариантности и полной консервативности разностных схем в случае лагранжевых координат.

В пятом параграфе проведено исследование свойств аппроксимационной вязкости инвариантных разностных схем для одномерных уравнений газовой динамики. Выделен подкласс инвариантных разностных схем с полиномиальной матрицей вязкости в п.д.п. Приведены результаты расчетов по инвариантным разностным схемам.

В шестом параграфе найдены условия инвариантности разностных схем для двумерных уравнений газовой динамики и исследованы различные подклассы инвариантных схем. Выделен подкласс инвариантных разностных схем с полиномиальными матрицами вязкости в п.д.п. Приведены результаты расчетов по инвариантным разностным схемам.

В седьмом параграфе проведен групповой анализ разностных схем расщепления для двумерных уравнений газовой динамики. Один из рассмотренных классов разностных схем является асимптотическим представлением метода "частиц в ячейках". Численное сравнение инвариантных и неинвариантных разностных схем расщепления проведено для модельного уравнения.

В приложение I вынесено получение необходимых в процессе изложения формул, требующих громоздких аналитических выкладок, а именно, дан вывод вторых продолжений инфинитезимальных операторов, допускаемых одномерной и двумерной системами уравнений газовой динамики.

В приложении 2 на основе проведенных теоретических исследований дана классификация наиболее употребляемых на практике разностных схем для одномерной системы уравнений газовой динамики по дисперсионным, диссипативным и инвариантным свойствам. Эта классификация была использована при численном решении прикладных газодинамических задач в Вычислительном центре СО АН СССР (г.Красноярск) и при разработке специализированного пакета программ.

В приложении 3 дано описание созданного под научным руководством автора и при его непосредственном участии комплекса программ для численного моделирования волн цунами. Эта проблема является актуальной народнохозяйственной задачей для районов советского Дальнего Востока. Исследование разностных схем, использованных в расчетах, проводилось методом дифференциального приближения. Для задачи о колебании жидкости в параболоидном бассейне дано сравнение результатов расчетов по инвариантным и неинвариантным разностным схемам.

Публикации по теме диссертации

1. Анучина Н.Н., Петренко В.Е., Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. On numerical methods of solving gas dynamical problems with large deformations.-Fluid Dynamics Transactions, 1971 v.5, part1, p.9-32.
2. Паасонен В.И., Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. On the theory of difference schemes for gas dynamics equations.-Lecture Notes in Physics, 1973, v. 35, p. 293-303.
3. Тушева Л.А., Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Об одном методе построения схем повышенного порядка аппроксимации.-В сб. Избран. пробл. прикл.матем. М., ВИНИТИ, 1974, с. 681-689.
4. Тушева Л.А., Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. О построении разностных схем повышенного порядка аппроксимации на основе дифференциальных следствий. -В кн. Некоторые пробл.вычисл. и прикл. математики. Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1975, с. 184-191.

5. Шокин Ю.И. О связи корректности первых дифференциальных приближений и устойчивости некоторых разностных схем. - В кн. Труды Всес.семинара по числ.методам механ.вязк.жидкости. Новосибирск, Наука, I969, с. 262-268.
6. Шокин Ю.И. Об аппроксимационной вязкости неявных разностных схем. -В кн. Труды Всес.семинара по числ.методам механ. вязкой жидкости. Новосибирск, Наука, I969, с.256-26I.
7. Шокин Ю.И. Об асимптотическом поведении решений разностных схем.-Изв. СО АН СССР, I969, № 3, сер.техн.н., вып. I, с.65-68.
8. Шокин Ю.И. О связи устойчивости разностных схем и параболичности их первых дифференциальных приближений для гиперболических систем уравнений.-Изв. СО АН СССР, I970, № 8, сер. техн.н., вып. 2, с.8I-85.
9. Шокин Ю.И. О методе первого дифференциального приближения в теории разностных схем для гиперболических систем уравнений. Труды МИАН, I973, т.I22, с. 66-84.
I0. Шокин Ю.И. Необходимое и достаточное условие инвариантности разностных схем в терминах первого дифференциального приближения. -В сб.Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, I974, т. 5, с.I20-I22.
II. Шокин Ю.И. О применимости метода дифференциального приближения при исследовании эффекта нелинейных преобразований в расчетах слабых решений. Новосибирск, I974, с. I8-26, (Препринт / Вычислительный центр СО АН СССР).
I2. Шокин Ю.И. К анализу диссипации и дисперсии разностных схем. В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, I976, т. 7, с. I3I-I4I.
I3. Шокин Ю.И. Analysis of the properties of approximation viscosity of difference schemes by means of the method of differential approximation. -Lecture Notes in Physics, 1976, v.59, p. 410-414.
I4. Шокин Ю.И. Численные методы газовой динамики. Инвариантные разностные схемы. Новосибирск, Гос.университет, I977, - 84с.
I5. Шокин Ю.И. К анализу свойств разностных схем методом дифференциального приближения.- В кн. Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, I978, с. I38-I45.

16. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1979, - 224 с.

17. Шокин Ю.И. Некоторые вопросы применения метода дифференциального приближения. - В сб. Численные методы решения задач переноса, ч. I. Минск, 1979, с. 14-53.

18. Шокин Ю.И., Талышев А.А. Об эквивалентных разностных схемах. В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1975, т. 6, № 2, с. 120-125.

19. Шокин Ю.И., Тушева Л.А. О диссипативных разностных схемах для гиперболических систем уравнений. - В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1971, т. 2, № 1, с. 91-98.

20. Шокин Ю.И., Урусов А.И. Об инвариантных разностных схемах расщепления. -В кн. Труды четвертого всесоюзного семинара по числ.методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1973, с.192-209.

21. Шокин Ю.И., Урусов А.И. Разностные схемы в пространствах обобщенных функций и их дифференциальные представления. Доклады АН СССР, 1979, т. 248, № 4, с.810-813.

22. Шокин Ю.И., Урусов А.И. Дифференциальные представления разностных схем в пространствах обобщенных функций.- В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1979, т.10, № 4, с.125-147.

23. Шокин Ю.И., Федотова З.И. Об одном классе инвариантных разностных схем. -В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1972, т.3, № 5, с.85-94.

24. Шокин Ю.И., Федотова З.И. Инвариантные разностные схемы с полиномиальной матрицей вязкости.-Доклады АН СССР, 1975, т.222, № 1, с.51-53.

25. Шокин Ю.И., Федотова З.И. Исследование аппроксимационной вязкости разностных схем для одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах.-В кн. Числ.методы решения задач фильтрации несжим.жидкости. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1975, с. 297-314.

26. Шокин Ю.И., Федотова З.И., Марчук Ан.Г. О связи консервативности разностных схем и свойств их первых дифференциальных приближений.-Доклады АН СССР, 1978, т.242, № 2, с.290-293.

27. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. О связи корректности первых дифференциальных приближений и устойчивости разностных схем для гиперболических систем уравнений.- Математ.заметки. 1968, т.4., № 5, с.493-502.

28. Яненко Н.Н., Анучина Н.Н., Петренко В.Е., Шокин Ю.И. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями.- В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1970, т. I, № I, с.40-62.

29. Яненко Н.Н., Анучина Н.Н., Петренко В.Е., Шокин Ю.И. О методе расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями и аппроксимационной вязкости. Тр.секции по числ.методам в газодинамике Втор.Междунар.коллоквиума по газодинамике взрыва и реагир. систем. М., ВЦ СО АН СССР, 1971, т.2, с.159-187.

30. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. Об аппроксимационной вязкости разностных схем.-Доклады АН СССР, 1968, т.182, № 2, с.280-281.

31. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем.-Доклады АН СССР, 1968, т.182, № 4, с.776-778.

32. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. Об аппроксимационной вязкости разностных схем для гиперболических систем уравнений.- В кн. Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1969, с. 269-282.

33. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. O zagadnieniu lepkosci approksymacyjnej w schematach roznicowich. -Metody Numericzne w Mechanice Plynow, Warszawa,1969, s.192-219.

34. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений. Сиб.матем.журнал, 1969, т.10, № 5, с.1173-1187.

35. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И.First differential approximation method and approximate viscosity of difference schemes.-The Phys.of Fluid, 1969, v.12, № 12,partII, p.28-33.

36. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О групповой классификации разностных схем для системы одномерных уравнений газовой динамики. В кн. Некоторые пробл.матем. и механ. Л., Наука, 1970, с. 277-283.

37. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. On the group classification of difference schemes for systems of equations in gas dynamics. -Lecture Notes in Physics, 1971, v.8, p.3-17.

38. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. Групповая классификация неявных разностных схем для систем уравнений газовой динамики. -В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1971, т.2, № 2, с.85-92.

39. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. Применение инвариантных разностных методов к задачам газовой динамики. Тезисы XIII Международного конгресса по теоретической и прикладной механике, М., 1972, с. III.

40. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. Schemas numeriques invariants de groupe pour les equations de la dynamique de gas. -Lecture Notes in Physics, 1973, v.18, p.174-186.

41. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О групповой классификации разностных схем для системы уравнений газовой динамики. Труды МИ АН СССР, 1973, т.122, с.85-96.

42. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. К теории разностных схем газовой динамики. - В сб. Труды симпоз. по механики сплошной среды и родственным проблемам анализа. (Тбилиси 23-29.9.1971), т.2, Тбилиси, Мецниереба, 1974, с. 292-306.

43. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И., Урусов А.И. О разностных схемах в произвольной криволинейной системе координат. - Доклады АН СССР, 1978, т.242, № 3, с. 552-555.

Шокин Ю.И.

Анализ свойств и классификация разностных схем методом дифференциального приближения

Автореферат

Технический редактор	Воронина Н.В.
Подписано в печать 16.06.80	МН 06816
Заказ №339	Объем 1,2 п.л.
	уч.изд.л. 1,2
	Тираж 150

Отпечатано на ротапринте Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР
630090, Новосибирск, 90, Институтская, 4/I