ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

На правах рукописи

КОНОВАЛОВ Анатолий Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

01.01.07 - вычислительная математика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Новосибирск - 1978

Работа выполнена в Вычислительном центре Сибирского отделения Академии наук СССР

<u>ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ</u>:

Член-корреспондент АН СССР

Годунов С.К.

Доктор физико-математических наук

Жидков Е.П.

Доктор физико-математических наук

Лебедев В.И.

Доктор физико-математических наук

Ляшко А.Д.

ВЕДУЩЕЕ ПРЕДПРИЯТИЕ - Киевский ордена Ленина Государственный университет имени Т.Г.Шевченко

Защита состоится ______________________ на заседании специализированного Ученого совета по защите докторских диссертаций Д 002.10.01 при Вычислительном центре Сибирского отделения Академии Наук СССР. Новосибирск,90, проспект Науки, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки ВЦ СО АН СССР.

Автореферат разослан "___" __________ 197 г.

Ученый секретарь специализированного Совета доктор физико-математических наук

В.Г.Романов

Развитие вычислительной техники открывает новые возможности для решения все более сложных научно-технических задач. Это, в свою очередь, изменяет и отношение к созданию программ, реализующих эти задачи на современных ЭВМ. От создания программы для решения той или иной конкретной задачи в настоящее время совершается переход к созданию Пакетов программ для решения класса задач (см., например, [9] , [2I], [25], [30]). Вопросы, касающиеся идеологии Пакетов программ для прикладных задач, достаточно подробно излагаются в сборниках научных трудов семинара по комплексам программ математической физики (Новосибирск, 1972, 1973, 1976 г.г).

При создании Пакета программ требуется решить целый ряд и чисто математических вопросов. Это связано как со сложившейся к настоящему времени "технологической цепочкой" современной вычислительной математики [2I] , так и с выбором принципов построения Пакета программ для решения класса задач [9] , [I3] , [25] . Технологическую цепочку, о которой идет речь, можно представить следующим образом [2I] : от реального явления - к математической модели явления; далее - к численному алгоритму; програме, реализующей этот алгоритм на ЭВМ, наконец, собственно к вычислениям на ЭВМ. Все звенья этой цепочки взаимосвязаны (в том числе и обратными связями), поэтому задача оптимизации технологической цепочки не может быть решена без анализа каждого ее звена и его влияния на соседние звенья.

В предлагаемой работе такой анализ проводится для задач теории упругости и задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. А именно:

I) Изучаются вопросы, связанные с постановкой задач теории упругости и фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости.

2) Изучаются вопросы, связанные с разработкой и обоснованием экономичных численных методов для решения этих задач.

3) Изучаются вопросы, связанные с проблемой "произвольной области" для задач теории упругости и фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости.

Выше уже говорилось о связи различных звеньев технологической цепочки. Поэтому вопросы, перечисленные в I)-3), также изучаются здесь не изолированно, а комплексно, т.е. в тесной связи друг с другом.

Пусть выбрана некоторая математическая модель рассматриваемого явления. Под этим понимается выбор искомых функций; выбор системы координат (тем самым и выбор области, в которой подлежат определению искомые функции); выбор функциональных зависимостей (уравнений состояния); выбор краевых и начальных данных. При изучении математических моделей помимо "внутренних" требований к ним, таких, например, как требование соответствия описываемому явлению, требование корректности и т.п., мы будем предъявлять и "внешнее" требование:

Математическая модель должна допускать численную реализацию.

В связи с наличием технологической цепочки это требование понимается здесь в том смысле, что мало иметь какую-либо корректную математическую постановку изучаемой задачи, нужно иметь и вычислительный алгоритм, реализующий эту постановку и удовлетворяющий вполне определенным требованиям. Эти требования в какой-то мере являются стандартными: аппроксимация, устойчивость, сходимость, экономичность, консервативность. Выполнение этих требований, как правило, гарантирует, что параметры вычислительного алгоритма не искажают, либо искажают контролируемым образом описываемое математической моделью реальное явление.

Сказанное не означает, что нужно вообще отказаться от математических моделей, которые удовлетворяют внутренним требованиям, но вычислительные алгоритмы для которых либо не разработаны, либо недостаточно обоснованы (имеется в виду, конечно, не только теоретическое обоснование). На ваш взгляд, такие модели пока не могут быть положены в основу при создании Пакета программ для численного решения описываемого этими моделями класса задач.

Что касается численных методов, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, то для изучаемых здесь задач рассматриваются, в основном, следующие:

А. Метод расщепления по физическим процессам.

Б. Метод расщепления по пространственным переменным.

В. Метод установления.

Общие формулировки и обоснование методов типа А-В для широкого класса задач математической физики даны в работах Г.И.Марчука, А.А.Самарского, Н.Н.Яненко, С.К.Годунова, В.С.Рябенького, Е.Г.Дьяконова, Дугласа, Писмана, Рекфорда и др.

Для рассматриваемых в диссертации задач см. также и [1], [3], [5], - [7], [10], [14], [15], [19], [20], [22], [23].
Метод А сводит исходную задачу к серии последовательных задач, каждая из которых учитывает одну сторону реального физического процесса.
Метод Б сводит решение многомерной задачи к последовательному решению только одномерных задач. Метод В позволяет с единой точки зрения трактовать эволюционные и неэволюционные задачи. После сведения неэволюционной задачи к эволюционной возможно применение методов типа А и Б.

Такой выбор численных методов, во-первых, обусловлен тем, что для широкого класса задач математической физики принципы построения методов типа А-В в настоящее время разработаны достаточно полно. Это позволяет основное внимание уделить построению таких математических моделей для изучаемых в работе задач, к которым эти принципы применимы. Вопросы обоснования методов типа А-В для построенных моделей исследуются затем, в основном, в соответствии с общей теорией разностных схем. Во-вторых, следует иметь в виду и чисто техническое обстоятельство: на основе методов типа А-В возможно вполне определенным образом решить вопрос о структуре Пакета программ для численного решения класса задач [13], [25].

Поясним сказанное [25]. Независимо от класса задач математической физики, решаемого с помощью Пакета, последний непременно включает в себя библиотеку так называемых модулей, входной язык и управляющую программу. Наибольшая неопределенность и наибольший субъективизм возникают именно при определении модульной библиотеки. Естественно, это связано с тем, что следует понимать под модулем в задаче математической физики. Эту неопределенность можно устранить, если каждая задача из класса включаемых в Пакет допускает решение с помощью методов типа А-В. В самом деле, тогда решение каждой конкретной задачи из класса исходных сведется к последовательному решению более простых задач. Эти "простые" задачи назовем базисными. Программная реализация базисных задач и составит модульную библиотеку Пакета. Последовательность решения базисных задач, обеспечивающую решение конкретной задачи, назовем представлением конкретной задачи в данном базисе. Приведем пример определения базисных задач при решении конкретной задачи в данном базисе. Приведем пример определения базисных задач при решении конкретной задачи методами типа А-В.

Пусть в некоторой области $\mathcal{D}$ с границей γ ищется решение краевой задачи

$$\mathcal{L}u = -\sum \frac{\partial}{\partial x}\left[a_{ij}(\mathcal{M})\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + c(\mathcal{M})u = f(\mathcal{M}), \qquad (1)$$

$$u_{/\gamma} = g(\mathcal{M}'), \qquad \mathcal{M}' \in \gamma$$

Входные данные $a_{ij}(\mathcal{M})$, $c(\mathcal{M})$, $f(\mathcal{M})$, $g(\mathcal{M}')$ и γ таковы, что решение задачи (1) существует и единственно в некотором нужном классе. Вместо дифференциального уравнения их (1) рассмотрим вспомогательное уравнение (выход на установление):

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - f, \qquad (2)$$

где в качестве оператора A выберем факторизованный

$$A = \left(E - \alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\left(E - \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right), \qquad Ef = f$$

Константы $\alpha_i > 0$ и зависят от $a_{ij}(\mathcal{M})$, $c(\mathcal{M})$. Делая теперь замену в (2)

$$z = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \left(E - \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)z = v,$$

приходим к системе

$$v - \alpha_1\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = Lu - f, \qquad z - \alpha_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = v, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = z \qquad (3)$$

Разностная аппроксимация системы (3) и введение соответствующих обозначений приведет нас к итерационной схеме универсального алгоритма для решения задачи (1):

$$\begin{aligned}&(E - \alpha_1\Lambda_{11})v_h^{k+1} = L_h u_h^k - f_h, \\ &(E - \alpha_2\Lambda_{22})z_h^{k+1} = v_h^{k+1}, \qquad u_h^{k+1} = u_h^k + \tau z_h^{k+1}\end{aligned} \qquad (4)$$

В этом смысле (3) есть замыкание вычислительного алгоритма (4).

В качестве базисных задач определяются следующие:

M_I: Краевая задача для одномерного уравнения Гельмгольца.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \alpha^2 w = \Phi$$

M_2: Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

$$\frac{dw}{dt} = f$$

Представление вычислительного алгоритма (4) для решения задачи (I) в базисе M_I, M_2 имеет вид

$$\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \qquad (5)$$

Такой подход к построению модульной библиотеки Пакета на основе методов типа А-В представляется весьма перспективным по многим причинам. Во-первых, для тех классов задач, где методы типа А-В обоснованы, сами базисные задачи определяются однозначно, либо с помощью общей теории можно по входным данным исходной задачи определить входные данные для каждой из базисных задач. Во-вторых, снимается неопределенность и субъективизм относительно состава модульной библиотеки, на сей раз модуль - есть программная реализация базисной задачи. Далее, в одном и том же базисе могут быть представлены вычислительные алгоритмы для решения достаточно широкого класса задач. Рассмотрим, к примеру, плоскую статическую задачу теории упругости

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \vec{f} = 0, \qquad (6)$$

$$\vec{u}_{/\gamma} = \vec{g}(\mathcal{M}'), \qquad \mathcal{M}' \in \gamma$$

Если численное решение этой задачи отыскивать с помощью итерационной схемы универсального алгоритма (см., например, [I]),то представление этого алгоритма для задачи (6) в базисе M_I, M_2 имеет вид

$$\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$$

Для смешанной задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - f, \qquad 0 < t \leqslant T, \qquad (7)$$

$$u(\mathcal{M},0) = \varphi(\mathcal{M}), \quad u_{/\gamma\times[0,T]} = g(\mathcal{M}',t), \quad \mathcal{M}' \in \gamma$$

представление вычислительного алгоритма (4) (следует переобозначить номер итерации на номер временного шага, а τ - считать шагом по времени) в базисе M_I, M_2 имеет вид

$$\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \quad , \tag{8}$$

что полностью совпадает с (5). Различия в базисных задачах из (5) и (8) сохраняются лишь во входных данных. И, наконец, за счет незначительного расширения базиса можно на основе методов типа А–В существенно расширить исходный класс задач, решаемых с помощью Пакета. Рассмотрим в качестве базисной задачи следующую

M_3: <u>Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.</u>

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = F$$

Расширение базиса M_I, M_2 до базиса M_I, M_2, M_3 позволяет представить в расширенном базисе вычислительные алгоритмы для решения следующих задач

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu - f, \\ u(\mathcal{M},0) = \varphi(\mathcal{M}), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(\mathcal{M},0) = \psi(\mathcal{M}), \quad u_{/\gamma \times [0,T]} = g(\mathcal{M}', t), \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu)\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \vec{u} + \vec{f}, \\ \vec{u}(\mathcal{M},0) = \vec{\varphi}(\mathcal{M}), \quad \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\mathcal{M},0) = \vec{\psi}(\mathcal{M}), \quad \vec{u}_{/\gamma \times [0,T]} = \vec{g}(\mathcal{M}', t) \end{cases} \tag{10}$$

и т.д. Представление одного из вычислительных алгоритмов, построенного на методе типа Б, для задачи (I0) (см, например, [I]) имеет вид

$$\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_3 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_3$$

Итак, вполне определенная структура вычислительных алгоритмов, основанных на методах типа А–В, дает возможность придать и библиотеке Пакета определенную модульную структуру. Как представляется, с этим обстоятельством нельзя не считаться при проектировании Пакетов программ для задач математической физики. Следует отметить, что понятие замыкания вычислительного алгоритма введено С.Л.Соболевым. Определение с помощью этого понятия базисных задач для модульной библиотеки предложено нами в [I3] . В [25] на этой основе предлагается вполне определенная структура Пакета для задач математической физики.

Общеизвестны трудности, теоретические и алгоритмические, которые возникают при численном решении задач математической физики в произвольных областях. В связи с наличием технологической цепочки сюда же следует отнести и трудности, связанные, как с непосредственным программированием вычислительного алгоритма для произвольной области, так и с созданием Пакета программ для решения класса задач в произвольной области. Если рассмотреть в самых общих чертах структуру программы, реализующую, например, вычислительный алгоритм типа Б для произвольной области, то бросается в глаза перегруженность программы логическими операциями по сравнению, скажем, с той же программой для прямоугольной области. Это приводит, в частности, и к реальному уменьшению быстродействия ЭВМ, особенно при использовании в качестве средства программирования языков высокого уровня, ибо тогда приходится учитывать и качество трансляторов. При создании Пакета программ для решения класса задач в произвольной области мы должны будем считаться с тем, что каждая конкретная задача характеризуется не только индивидуальным набором коэффициентов, но и индивидуальной областью, в которой ищется решение. Это значительно усложнит структуру Пакета.

Метод фиктивных областей, предложенный В.К.Саульевым и В.И. Лебедевым как приближенный метод решения конкретных задач, позволяет снять именно технологические трудности. Идея метода довольно проста. Фиктивной областью $\mathcal{D}_1$ дополняем исходную область $\mathcal{D}$ до некоторой другой области $\mathcal{D}_0$. Обычно выбирают $\mathcal{D}_1$ дополнением $\mathcal{D}$ до прямоугольника (прямоугольного параллелепипеда), хотя при теоретическом рассмотрении такой выбор не является обязательным. Коэффициенты исходной задачи продолжают в $\mathcal{D}_1$ тем или иным образом в зависимости от типа краевого условия на γ - границе области $\mathcal{D}$. На γ ставят некоторые условия согласования. На Γ - границе области $\mathcal{D}_0$, как правило, можно поставить краевое условие первого рода. Тогда отыскание решения исходной задачи в $\mathcal{D}$ сводится к отысканию решения вспомогательной задачи с разрывными коэффициентами, но в стандартной области $\mathcal{D}_0$. Тем самым метод фиктивных областей позволяет рассматривать исходные задачи только в стандартной области (прямоугольник, прямоугольный параллелепипед), оставляя в качестве индивидуальности задачи набор ее коэффициентов и правых частей. Технологические преимущества такого рассмотрения нам представляются очевидными.

Итак, вопросы построения математических моделей, вопросы выбора и обоснования методов численной реализации этих моделей, вопрос о произвольной области, в которой ищется решение, рассматриваются в предлагаемой работе как в тесной связи друг с другом, так и с точки зрения применения полученных результатов при создании Пакета программ для изучаемых классов задач. Актуальность такого рассмотрения проблемы вытекает из постановлений Президиума АН СССР и ГК по науке и технике при Совете Министров СССР о создании Пакетов программ для классов прикладных задач. Именно комплексность исследований: от математической постановки до модульной структуры вычислительного алгоритма позволяет говорить о том, что в предлагаемой работе заложены теоретические основы Пакета программ для изучаемых классов задач. В первой главе рассматриваются задачи теории упругости: постановка задач теории упругости в напряжениях, разностные методы решения этих задач. Во второй главе рассматриваются задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости: различные постановки этих задач и вопросы, связанные с численной реализацией этих постановок. В третьей главе изучается метод фиктивных областей, в том числе и для задач теории упругости и фильтрации, хотя результаты, полученные в главе Ш справедливы не только для этих задач. Именно поэтому вопросам, связанным с методом фиктивных областей, посвящена отдельная глава.

Несколько слов о проводимых в диссертации расчетах. Их назначение двоякое. С одной стороны, проиллюстрировать или уточнить те или иные теоретические положения, с другой стороны, продемонстрировать возможности тех или иных постановок и методов их реализации в реальных нелинейных задачах, для которых не имеется полного теоретического обоснования, и сам расчет выступает тогда в качестве одного из элементов такого обоснования.

Постановка динамической задачи теории упругости, связанная с определением вектора перемещения, хорошо известна. В $Q = \mathcal{D} \times [0,T]$ ищется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu)\, grad\, div\, \vec{u} + \vec{f}\,, \qquad (11)$$

удовлетворяющее начальным данным

$$\vec{u}(M,0) = \vec{\varphi}(M), \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(M,0) = \vec{\psi}(M) \qquad (12)$$

и некоторым краевым условиям. В качестве таковых мы всюду в главе I рассматриваем краевые условия

$$\sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(\mathcal{M}',t)n_k = g_i(\mathcal{M}',t) . \qquad (13)$$

Начальные данные и краевые условия предполагаются согласованными. Р.Клифтоном и С.К.Годуновым динамическая задача теории упругости формулируется как задача в скоростях – напряжениях

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i , \qquad \xi_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} ,$$
$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_{ik} - \frac{\lambda \delta_{ik}}{3\lambda+2\mu}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}\right) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \qquad (14)$$

К (I4) добавляются начальные данные

$$\vec{\xi}(\mathcal{M},0) = \vec{\psi}(\mathcal{M}), \qquad \sigma_{ik}(\mathcal{M},0) = \lambda\delta_{ik}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{kk} + 2\mu\alpha_{ik} ,$$
$$2\alpha_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \qquad (15)$$

и какие-либо краевые условия, например (I3). И, наконец, динамическая задача теории упругости может быть сформулирована только в напряжениях. Будем различать два случая. В первом случае (постановка I) при получении уравнений для определения составляющих тензора упругих напряжений σ_{ik} используются как уравнения равновесия

$$0 = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + f_i = L_i\vec{\sigma} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \qquad (16)$$

так и уравнения совместности Сен-Венана

$$\mathcal{G}(\vec{\varepsilon}) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \qquad (17)$$

Иногда рассматриваются некоторые комбинации уравнений (I7) и следствий из (I6), так что общее число уравнений для определения σ_{ik} равно числу неизвестных σ_{ik}. Во втором случае (постановка II) при получении уравнений для определения σ_{ik} используются только уравнения равновесия, и мы имеем

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial t^2} = \frac{\partial L_i\vec{\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial L_k\vec{\sigma}}{\partial x_i} , \qquad (18)$$

а в качестве следствия из (I8)

$$\frac{\partial^2 \theta(\vec{\varepsilon})}{\partial t^2} = 0. \tag{I9}$$

В § 2 главы I исследована как постановка П, так и связь этой постановки с постановками I, (II)-(I3); (I3)-(I5). Использование уравнений (I8) в качестве основы для постановки динамических задач теории упругости в напряжениях впервые, повидимому, было предложено J Ignaczak - ом. Однако он ограничился только однородными начальными данными, что умаляет общность рассмотрения. Дело здесь в том, что утверждение

$$\theta(\vec{\varepsilon}) = 0 \qquad \text{для всех} \qquad t > 0 \tag{20}$$

вытекает из (I9) только при специальном способе задания начальных данных. Именно способ задания начальных данных в постановке П и является основным. Мы определяем начальные данные для (I8) следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}(\mathcal{M},0) &= 2\mu\alpha_{ik} + \lambda\delta_{ik}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{kk}, \\ \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial t}(\mathcal{M},0) &= 2\mu\beta_{ik} + \lambda\delta_{ik}\sum_{k=1}^{3}\beta_{kk} \end{aligned} \tag{2I}$$

Здесь α_{ik} задаются формулой (I5), а β_{ik} вычисляется по той же формуле с подстановкой ψ_i вместо φ_i. При таком способе задания начальных данных (20) теперь является следствием из (I8). Поэтому в задаче (I8), (2I), (I3) существует вектор перемещения. Его компоненты можно определить по формулам Коши. Однако, существует более простой способ определения вектора перемещения. Если

$$w_i(\mathcal{M},t) = \varphi_i(\mathcal{M}) + t\psi_i(\mathcal{M}) + \int_0^t (t-s)L_i\vec{\sigma}(\mathcal{M},s)\,ds, \tag{22}$$

то задача (II)-(I3) и задача (I8), (2I), (I3), (22) - эквивалентны: Следствие I. 2.2. В § 2 главы I доказаны и другие теоремы подобного типа, устанавливающие связь между различными постановками динамических задач теории упругости: Теоремы I 2.4 - I.2.6, Следствие I. 2.3.

В § 3 главы I рассматриваются постановки статических задач теории упругости в напряжениях со стационарным краевым условием (I3). Общепринятыми в настоящее время являются либо постановка

$$L_i\vec{\sigma} = 0, \qquad \theta(\vec{\varepsilon}) = 0,$$

$$L_i\vec{\sigma} = 0, \qquad \mathcal{G}(\vec{\varepsilon}) = 0 \quad , \tag{23}$$

либо так называемая постановка Мичелла. Способ построения уравнений в ней основан на использовании вполне определенных продолженных по отношению к (23) уравнений. При этом никаких дополнительных краевых условий, отличных от (I3) не требуется следствия I. 3.I-I. 3.2. Не всякая продолженная по отношению к (23) система обладает таким свойством. Установленные факты имеют принципиальное значение, ибо заставляют критически отнестись к численным алгоритмам решения статических задач теории упругости в напряжениях с использованием дополнительных краевых условий. В каждом таком случае требуется дополнительный анализ[I] , [3] . В § 3 главы I нами предложена нестационарная постановка статических задач теории упругости в напряжениях [22] :

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial L_i\vec{\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial L_k\vec{\sigma}}{\partial x_i} \ ,$$

$$2\varepsilon_{ik}(M,0) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \qquad \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(M')n_k = g_i(M') \tag{24}$$

Доказано, что при $t \to \infty$ решение задачи (24) сходится к решению задачи (23), (I3): теорема I.3.6. Тем самым по существу, дается и алгоритм решения задачи (23), (I3). Как показано в § 3 этот алгоритм особенно удобен тем, что в качестве исходных уравнений для определения σ_{ik} не используются уравнения $\mathcal{G}(\vec{\varepsilon}) = 0$. Как и в задаче (I8), (2I), (I3), эти уравнения являются следствием из (24). Это и позволяет не использовать в численных алгоритмах никаких краевых условий, кроме (I3).

Экономичные разностные методы типа Б для динамических задач теории упругости в перемещениях изучались в работах А.А.Самарского, И.Г.Белухиной, Ю.Н.Ватолина, а также и в [I] . Как правило в этих работах решается только вопрос об определении вектора перемещения $\vec{u}_k$, поэтому нахождение напряжений связано с численным дифференцированием сеточных функций, что как известно, может приводить к потере точности. С этой точки зрения более перспективной представляется постановка в скоростях-напряжениях (I4)-(I5). Экономичные разностные схемы типа Б для этой постановки при различных краевых условиях изучались, например, в работах Н.М.Горского. Для динамических задач с краевым условием (I3) более удобной для численной реализации является используемая постановка (I8), (2I), (I3). Экономичные разностные методы типа Б–В для статических задач теории упругости в перемещениях изучались А.А.Самарским, Е.Г.Дьяконовым, И.Г.Белухиной, а также и в [I]. Схемы типа Б–В для непосредственного определения напряжений в статических задачах с краевым условием (I3), как в постановке (23), так и в постановке Мичелла, изучались нами в [I], [3].

В §§ 4,5 главы I изучаются численные алгоритмы, реализующие постановки (I8), (2I), (I3) и (24). Из условий независимости вычисления перемещения по деформации от сеточного пути интегрирования выводятся разностные аналоги условий совместности Сен-Венана: Лемма I.4.I. Показано, что способ аппроксимации соотношений перемещение–деформация порождает и способ аппроксимации условий совместности. Это, в свою очередь, позволяет однозначно указать способ аппроксимации дифференциальных выражений

$$A_{ik}(\vec{\sigma}) = \frac{\partial L_i \vec{\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial L_k \vec{\sigma}}{\partial x_i}$$

в (I8), (24). На основе (24) построены явная и неявная итерационные схемы для нахождения разностного аналога (23), (I3). Исследование скорости сходимости проводится в соответствии с общей теорией А.А.Самарского. Основным здесь является то обстоятельство, что именно существование вектора перемещения, хотя сам вектор перемещения и не участвует в формулировке задачи, обеспечивает положительную определенность оператора $-A_h$. Это связано с тем, что итерационная схема

$$\frac{\vec{\varepsilon}^{\,n+1} - \vec{\varepsilon}^{\,n}}{\alpha} = A_h(\vec{\sigma}_h^n)$$

при соответствующих начальных условиях порождает условие совместности деформаций $6_h(\vec{\varepsilon}_h^{\,n+1}) = 0$. [23]. Аналогичная ситуация имеет место и в явных разностных схемах для решения динамической задачи (I8), (2I), (I3), [I4], [I9].

Более сложным является вопрос обоснования неявных схем, хотя в алгоритмическом плане в силу способа построения правых частей в (I8), (24) и способа их аппроксимации нахождение $\vec{\sigma}_h^{\,n+1}$ сводится к прогонкам по линиям $x_k = const$. Дело в том, что из неявной схемы

$$C\,\frac{\vec{\sigma}^{\,n+1}-\vec{\sigma}^{\,n}}{\alpha}=A_h(\vec{\sigma}_h^{\,n}) \qquad (25)$$

либо

$$C\,\frac{\vec{\sigma}^{\,n+1}-2\vec{\sigma}^{\,n}-\vec{\sigma}^{\,n-1}}{\tau^2}=A_h(\vec{\sigma}_h^{\,n}) \qquad (26)$$

в качестве следствия не вытекает $B_h(\vec{\sigma}_h^{\,n+1})=0$. В этом случае найденное из (25) или из (26) $\vec{\sigma}^{\,n+1}$ пересчитывается таким образом, чтобы $B_h(\vec{\sigma}_h^{\,n+1})=0$. Это гарантирует положительную определенность оператора $-A_h$ и возможность в дальнейшем применения общей теории.

В § 6 главы I изучается возможность применения постановки динамических задач в напряжениях для несжимаемой упругой среды и для вязкоупругих сред Кельвина и Максвелла [31].

В качестве практического применения изложенной в главе I теории в приложении к главе I приводятся примеры расчетов реальных задач, связанные с определением напряженно-деформированного состояния оптических зеркал под действием собственного веса, температурного поля и условий закрепления. Приведены примеры расчетов двумерных (в рамках гипотезы о плоском напряженном состоянии) и трехмерных задач. Расчеты трехмерных задач позволяют, в частности, определить условия применимости гипотезы о плоском напряженном состоянии для рассматриваемого круга проблем.

Исследование постановок и разностных схем для динамических и статических задач теории упругости в напряжениях, проведенное в главе I, вместе с исследованиями цитированных выше авторов позволяет считать обоснование экономичных разностных методов типа Б-В для линейных задач теории упругости в определенной мере завершенным.

Глава II посвящена задачам фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Разработка численных методов для этих задач началась сравнительно недавно и связана с внедрением в промысловую практику вторичных методов воздействия на пласт, таких как

а) вытеснение нефти из пласта водой или растворителями;

б) термическое воздействие на пласт и т.п.

Практическая ценность расчетов задач типа а), б) чрезвычайно велика. Достаточно сказать, что с помощью вторичных методов в США в 1963 г. получено около одной трети всей добытой нефти, а в 1980 г. около половины всей добычи будет получено подобным образом.

Экономичные численные методы для решения многомерных задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил впервые были рассмотрены в работе Дугласа, Писмана, Рэкфорда (1958). Однако практическая реализация предложенных в этой работе методов оказалась сопряженной с весьма значительными трудностями. Это, как выяснилось впоследствии, было связано со многими обстоятельствами, в том числе и с предложенной в этой работе одной из постановок задачи. Именно трудности численной реализации на ЭВМ стимулировали в последующие годы систематическое изучение моделей фильтрации, постановок задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости, численных методов. В этих исследованиях принимали участие коллективы в НИИ Баку, Бугульмы, Казани, Киева, Москвы, Новосибирска, Ташкента, Уфы. Вклад автора в эти исследования изложен в [2], [4] - [8], [10], [13], [18], [27]. В этих работах изучается, разумеется с разной степенью подробности, весь комплекс вопросов: постановка, численные методы, проблема произвольной области, модульный анализ вычислительных алгоритмов в задачах фильтрации.

Задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости, изучаемые в главе II, обладают целым рядом специфических особенностей. Это затрудняет, а зачастую и делает невозможным непосредственное применение численных методов, которые хорошо зарекомендовали себя в других задачах, в частности, методов типа Б,В. Поскольку эти особенности могут быть связаны и с выбором искомых функций, в § I главы II изучается вопрос о постановке задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. Наряду с известными ранее постановками φ_i; $\mathcal{P}, R$ предлагаются постановки задач фильтрации в терминах s - насыщенность вытесняющей фазы, p_i - фазовое давление; а для плоских задач s, ψ - функция тока суммарного течения. Обсуждается вопрос о постановке краевых условий в терминах φ_i; $\mathcal{P}, R$; s, p_i, s, ψ в том числе и в связи с наличием так называемого концевого эффекта. Концевой эффект связан с тем, что краевые условия второго рода оказываются вырожденными в том смысле, что при стремлении s к некоторым предельным значениям входящий в краевое условие $grad_n s$

стремится к бесконечности.

В § 2 главы П на примере модельной системы

$$(-1)^{3-i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial u_{3-i}}{\partial t}\right)=L_i u_i\,,\qquad i=1,2\,, \tag{27}$$

где $L_i u_i = \gamma_i \Delta u_i$, либо $L_i u_i = \sum\limits_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\gamma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$, $\gamma_i > 0$, $\gamma_{ik} > 0$, рассмотрены основные типы смешанных задач, возникающих в теории фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости: на границе области фильтрации заданы фазовые давления, на границе области фильтрации заданы фазовые расходы и т.п. Для системы (27) изучаются разностные схемы: явные и неявные, на примере которых выявляются особенности построения разностных схем для неэволюционной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в постановке φ_i. Предлагается вариант гиперболической регуляризации неэволюционной системы (27)

$$\tau\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+(-1)^{3-i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial u_{3-i}}{\partial t}\right)=L_i u_i \tag{28}$$

Такая регуляризация возникает при использовании трехслойных разностных схем для (27). Показано, что при соответствующем выборе начальных условий разностная схема, аппроксимирующая (28) при $\tau \to 0$ сходится к решению соответствующей задачи для системы (27). Далее в этом же параграфе детально исследована итерационная разностная схема, предложенная в работе Дугласа, Писмана, Рэкфорда для численного решения задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил в потенциалах φ_i. Получена оценка скорости сходимости итерационного процесса (П.2.56). Своеобразие этой оценки связано с тем, что в этом итерационном процессе начальная итерация не может быть выбрана произвольно. Из (П.2.58) следует, что без решения задачи о выборе итерационных параметров метод Дугласа, Писмана, Рэкфорда не может быть рекомендован для решения конкретных задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Этот вывод подтверждается приведенными в конце § 2 результатами численного расчета.

В этом смысле выгодно отличаются постановки задач фильтрации $R,\mathcal{P}$; s,ψ; s,p_i. В § 3 главы П рассматриваются разностные схемы для задач фильтрации в этих постановках. Эти разностные схемы основаны на методе раздельного определения искомых функций. Например, в постановке s,ψ для определения

s по известному ψ имеем какую-либо краевую задачу для уравнения Лапласа; для определения s по известному ψ имеем смешанную задачу Коши для параболического уравнения. Хотя каждая из задач является нелинейной, общие принципы построения разностных схем для каждой из них достаточно хорошо известны. Поэтому основное внимание в § 3 уделено двум вопросам, первый из которых - это вопрос об аппроксимации вырождающегося краевого условия типа

$$a(s)\frac{\partial s}{\partial x} = Q_0 , \quad Q_0 = const. \tag{29}$$

В (29) $a(s) \to 0$ при $s \to \underline{s}$ либо при $s \to \overline{s}$. Физически условие (29) означает, что на границе области фильтрации задан источник с расходом Q_0. Как показывает анализ интегрального закона сохранения, точность расчета в целом существенно зависит от аппроксимации краевого условия (29). Поэтому обычная аппроксимация (29) с формально первым порядком точности здесь непригодна, ибо при такой аппроксимации может не выполняться физическое требование $s < 1$. Последнее накладывает очень существенное ограничение на малость h - шаг сетки по пространственной переменной. В § 3 при построении аппроксимации краевого условия (29) использовано то обстоятельство, что при $s \to \underline{s}$ либо при $s \to \overline{s}$ вырождается не только одно из краевых условий, но и само уравнение для определения s. Это и позволяет раскрыть неопределенность типа $0 \cdot \infty$. Вклад "фиктивных" источников в интегральный закон сохранения при построенном способе аппроксимации краевого условия (29) по порядку тот же, что и погрешность аппроксимации дифференциального уравнения для определения s разностным. Далее, на примере постановки R, $\mathcal{P}$ подробно анализируется вопрос о разностной аппроксимации дифференциального уравнения для насыщенности вытесняющей фазы. Дело в том, что если мы учитываем капиллярные силы, то реальный физический процесс изменения насыщенности состоит из двух частей. Первая часть - конвективный перенос достигнутых значений насыщенности, вторая часть - изменение насыщенности под действием капиллярных сил. Таким образом, разностная схема должна хорошо описывать по существу два различных физических процесса. Достаточно рассмотреть предельные случаи, т.е. случаи, в которых основную роль играет та или иная часть процесса, чтобы понять, что требования, предъявляемые к разностной аппроксимации в большей своей части будут противоречивыми. Проделанный в § 3 главы П анализ приводит нас к формулировке численного метода для решения задач фильтрации с учетом капиллярных сил в постановках $R, \mathcal{P}$; s, ψ; s, p_i, а именно, к формулировке метода расщепления по физическим процессам (метод А). Определение насыщенности в этом методе производится в два этапа, на каждом из которых учитывается лишь одна сторона физического процесса изменения насыщенности. В § 5 этой же главы проводится экспериментальное (с помощью расчетов на ЭВМ) обоснование метода расщепления по физическим процессам в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости.

Первая стадия физического процесса изменения насыщенности, конвективный перенос, описывается так называемой моделью Баклея--Леверетта. Эта модель изучается нами в § 4 главы П. При заданном суммарном расходе Q_0 распределение насыщенности вытекающей фазы в одномерном случае определяется из уравнения Баклея-Леверетта.

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + Q_0\frac{\partial \varphi(s)}{\partial x} = 0, \quad \varphi(s) = \frac{\mu_0 f_2(s)}{\mu_0 f_2(s) + f_1(s)}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (30)$$

В (30) m - пористость, μ_i - динамическая вязкость фазы, $f_i(s)$ - относительная фазовая проницаемость, индекс I отнесен к вытесняемой фазе и $s_2 = s$. Весьма существенным является тот факт, что $f_i(s)$ определяются экспериментально и, следовательно, с некоторой неустранимой погрешностью. Другой особенностью уравнения (30) является невыпуклость $\varphi(s)$.
В § 4 проводится качественное исследование смешанной задачи Коши

$$s(x,0) = f(x), \quad x > 0, \qquad s(0,t) = const, \quad t > 0 \qquad (30')$$

для уравнения (30). Это позволяет оценить влияние параметра μ_0 на структуру решения задачи (30), (30').

Понятие корректно поставленной дифференциальной задачи включает в себя однозначную разрешимость задачи и непрерывную разрешимость задачи и непрерывную зависимость решения от входных данных. Естественно потребовать, чтобы решение задачи (30), (30') непрерывно зависело от $f_i(s)$. Проведенное исследование, подтверждаемое численным расчетом, показывает, что в области резкого изменения насыщенности такой зависимости нет. Структура течения оказывается весьма чувствительной к малым, лежащим далеко за пределами точности эксперимента, изменениям $f_i(s)$, хотя интегральные законы сохранения, соответствующие измененным и неизмененным $f_i(s)$ близки. Это и понятно, поскольку в интегральный закон сохранения фазы входит $\varphi(s)$, а структура течения определяется $\varphi'(s)$. Проведенный анализ показывает, что следует очень осторожно относиться к прогнозам времен прорыва, полученных при расчетах на основе модели Баклея-Леверетта.

Исследования главы II (частично и главы III) легли в основу при создании программ для решения конкретных задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. В § 5 главы II приведены характеристики этих программ и результаты численных расчетов, дающие представление о классах задач, которые возможно решать с помощью этих программ. В этом же параграфе на примере достаточно типичных реальных задач проведено сравнение различных разностных схем дляуравнения Баклея-Леверетта (30). О других расчетах § 5 уже говорилось выше.

Задачи для линейных дифференциальных уравнений с быстроменяющимися коэффициентами в подобластях-впервые были исследованы в работах С.Л.Соболева, М.И.Вишика, Л.А.Люстерника, Э.Ч.Титчмарша. Эти исследования, продолженные затем В.К.Саульевым, В.Д.Копченовым, В.И.Лебедевым, В.Я.Ривкиндом и другими, легли в основу метода фиктивных областей. Начиная с работ В.К.Саульева, В.И.Лебедева, метод фиктивных областей рассматривается как приближенный метод решения конкретных задач. Это связано с алгоритмическими и технологическими трудностями при численном решении задач математической физики в произвольных многомерных областях. Метод фиктивных областей рассматривается нами как метод решения проблемы произвольной области для изучаемых в диссертации задач.

Глава III посвящена обоснованию метода фиктивных областей в задачах упругости: задача кручения - отыскивается функция напряжения, статическая задача теории упругости - отыскивается вектор перемещения $\vec{u}$, и в задачах фильтрации - рассматривается постановка $\mathcal{P}$, R. Следует сразу же отметить, что полученные в главе III результаты справедливы не только для перечисленных выше задач. Согласно методу фиктивных областей вместо решения исходной задачи "u" в области $\mathcal{D}$ ищется решение вспомогательной задачи "u_ε" в области $\mathcal{D}_0$. Далее формулируется разностная

задача о нахождении $u_{\varepsilon h}$ в $\mathcal{D}_{oh}$.
Особо следует отметить то обстоятельство, что хотя вспомогательные задачи в методе фиктивных областей формулируются как задачи с разрывными коэффициентами, использование однородных консервативных разностных схем позволяет вести расчет без выделения линий разрыва. Поскольку

$$\| u_{\varepsilon h} - u \|_{\mathcal{D}} \leq \| u_{\varepsilon h} - u_h \|_{\mathcal{D}} + \underline{\| u_h - u \|_{\mathcal{D}}}$$

либо

$$\| u_{\varepsilon h} - u \|_{\mathcal{D}} \leq \| u_{\varepsilon} - u \|_{\mathcal{D}} + \underline{\| u_{\varepsilon h} - u_{\varepsilon} \|_{\mathcal{D}}}$$

и для рассматриваемых задач имеются либо методы оценки, либо сами оценки подчеркнутых членов, то основное внимание уделяется получению оценок типа

$$\| u_{\varepsilon} - u \|_{\mathcal{D}} = O(\varepsilon^{\alpha}), \quad \| u_{\varepsilon h} - u_h \|_{\mathcal{D}h} = O(\varepsilon^{\beta}) \qquad (31)$$

в тех или иных нормах, как правило, в нормах $W_2^1(\mathcal{D})$, либо $W_2^1(\mathcal{D}_h)$. Кроме того, в стационарных задачах само $u_{\varepsilon h}$, как правило, находится с помощью итерационных методов. Поэтому специально изучается вопрос о скорости сходимости итерационных методов для нахождения $u_{\varepsilon h}$.

В § I главы III излагается история вопроса и идеология метода фиктивных областей. Приводится пример задачи о кручении бруса, иллюстрирующий возможности метода. На этом примере видны преимущества "физического" продолжения исходной задачи в фиктивную область. А именно, пусть вспомогательная задача сформулирована так же, как задача о кручении, но составного бруса. Тогда, хотя функции кручения в основной области отличаются на величину $O(\varepsilon^2)$, тем не менее в этой же области совпадают напряженные состояния, отвечающие основной и вспомогательной задачам.

В § 2 главы III рассматривается плоская статическая задача теории упругости

$$-A\vec{u} = \vec{f}, \qquad A\vec{u} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu)\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \vec{u} \qquad (32)$$

с краевыми условиями

$$а). \ \vec{u}_{/\Gamma} = 0, \qquad б). \ T\vec{u}_{/\Gamma} = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(\mathcal{U}')n_k = 0 \qquad (33)$$

Для этой задачи рассматривается продолжение по коэффициентам: $\lambda_{\varepsilon} = \lambda \varepsilon^{\alpha}$, $\mu_{\varepsilon} = \mu \varepsilon^{\alpha}$ и $\alpha = -2$ для задачи с краевым условием (33,а), $\alpha=2$ для задачи с краевым условием (33,б). Получена оценка

$$\| \vec{u} - \vec{u}_\varepsilon \|^2_{\mathring{W}_2^1(\mathcal{D})} = O(\varepsilon^2) \tag{34}$$

для задачи с краевым условием (33,а). Для задачи с краевым условием (33,б) в оценке (34) следует заметить $\mathring{W}_2^1(\mathcal{D})$ на $W_2^1(\mathcal{D})$ и под "u" понимать одно из решений задачи (32), (33,б). Далее для задачи (32), (33,а) рассматривается и другое продолжение в фиктивную область, называемое нами продолжением типа фиктивный сток. Вспомогательная задача формулируется следующим образом

$$-A\vec{u}_\varepsilon = \vec{f}, \quad \mathcal{M} \in \mathcal{D}, \quad -A\vec{u}_\varepsilon - \frac{\vec{u}_\varepsilon}{\varepsilon^2} = 0, \quad \mathcal{M} \in \mathcal{D}_1, \tag{35}$$

$$\vec{u}_{\varepsilon/\Gamma} = 0$$

В этом случае в правой части (34) следует заменить $O(\varepsilon^2)$ на $O(\varepsilon)$. Продолжение типа фиктивный сток приводит к такой же оценке и в задаче кручения.

В § 3 главы III рассматривается вопрос о получении оценки типа (31) для модельных задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. В качестве основной рассматривается смешанная задача Коши для неэволюционной системы (27) с предельными условиями

$$u_1(\mathcal{M},0) - u_2(\mathcal{M},0) = \psi(\mathcal{M}), \quad a).\ u_{i/\gamma \times [0,T]} = 0, \quad б).\ \frac{\partial u_i}{\partial n}_{/\gamma \times [0,T]} = 0 \tag{36}$$

После перехода к новым искомым функциям $u_1 - u_2 = R$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \varphi$ задача (27), (36) распадается на две независимые задачи: эллиптическую для φ и параболическую для R. Для каждой из этих задач проводится отдельное исследование. Для параболической задачи с краевым условием (36,а) получена оценка

$$\| R_\varepsilon(t) - R(t) \|^2_{\mathcal{D}} = O(\varepsilon^2) \tag{37}$$

как при продолжении по коэффициентам, так и при продолжении типа фиктивный сток. Для параболической задачи с краевым условием (36,б) получена оценка

$$\| R_\varepsilon(t) - R(t) \|^2_{\mathcal{D}} + \int_0^t \| R_\varepsilon(t') - R(t') \|^2_{1,\mathcal{D}}\, dt' = O(\varepsilon^2). \tag{38}$$

Для эллиптической задачи в случае краевого условия (36,а) оценки типа (31) известны, поэтому здесь основное внимание уделено получению оценки в случае краевого условия (36,б). Получена оценка

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|^2_{W_2^1(\mathcal{D})} = O(\varepsilon^2) \tag{39}$$

при продолжении по коэффициентам. В этом же параграфе рассматривается вопрос о моделировании краевых условий непротекания в задачах фильтрации с помощью метода фиктивных областей.

В § 4 главы III на примере задачи

$$-\sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu = f,$$

$$u_{/\gamma_1} = 0, \qquad \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_i)_{/\gamma_2} = 0 \tag{40}$$

и задачи (32) с краевыми условиями

$$\vec{u}_{/\gamma_1} = 0, \qquad T\vec{u}_{/\gamma_2} = 0, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma \tag{41}$$

рассматривается вопрос построения вспомогательных задач в методе фиктивных областей и вопрос получения оценок типа (31). Предлагается три конструкции вспомогательных задач. В первой – строится вспомогательная область $\mathcal{D}_1$, общая граница которой с $\mathcal{D}$ есть γ_1 (или γ_2). В область $\mathcal{D}_1$ продолжаются коэффициенты исходной задачи в соответствии с типом краевого условия на общей границе. Тем самым получаем задачу в области $\mathcal{D} + \mathcal{D}_1$, на границе которой всегда может быть поставлено краевое условие одного типа. Во второй – только что построенная задача объявляется исходной и строится область $\mathcal{D}_2$, которая объемлет область $\mathcal{D} + \mathcal{D}_1$. В эту область продолжаются коэффициенты только что построенной задачи в соответствии с краевым условием на γ_2. Более простой, во всяком случае при численной реализации, представляется третья конструкция. Выбираем область $\mathcal{D}_3$ с границей Γ_0 так, что $\mathcal{D}_3$ объемлет $\mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{P} \in \gamma$, $R \in \gamma$ – общие точки γ_1 и γ_2. Внешнюю к $\mathcal{D}$ нормаль из $\mathcal{P}$, R продолжим до пересечения с Γ_0. Точки пересечения обозначим через $\mathcal{P}_0$, R_0. Пусть $\mathcal{D}_1$ часть области $\mathcal{D}_3$, заключенная между $\mathcal{P}\mathcal{P}_0$, Γ_{01}, R_0R и γ_1. Через $\mathcal{D}_2$ обозначим оставшуюся часть области $\mathcal{D}_3$, заключенную между RR_0, Γ_{02}, $\mathcal{P}_0R$ и γ_2. Здесь $\Gamma_0 = \Gamma_{01} + \Gamma_{02}$. В $\mathcal{D}_1$ продолжим коэффициенты исходной задачи в соответствии с краевым условием на γ_1, а в

$\mathcal{D}_2$ – в соответствии с краевым условием на γ_2. Как для задачи (40), так и для задачи (32), (41), получены оценки типа (31) для указанных выше продолжений: Теоремы III.4.1 – III.4.5. Эти оценки по порядку те же, что и для продолжений с краевым условием одного типа.

В § 5 главы III на примере задачи

$$-\sum_{k,m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{km}\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=f,\qquad u_{/\gamma}=0 \tag{42}$$

рассматривается вопрос о получении второй оценки типа (31). В качестве основной области рассматривается уголок, так что $\mathcal{D}=\mathcal{D}_0-\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_0=\{0\leqslant x_k\leqslant 1\}$, $\mathcal{D}_1=\{0.5\leqslant x_i\leqslant 1\}$. Решение разностной задачи, как основной, так и вспомогательной определяется с помощью сумматорного тождества получена оценка

$$\| u_{\varepsilon h}-u_h\|^2_{W_2^1(\mathcal{D}_h)}=O(\varepsilon) \tag{43}$$

при продолжении типа фиктивный сток и оценка

$$\| u_{\varepsilon h}-u_h\|^2_{W_2^1(\mathcal{D}_h)}=O(\varepsilon^2) \tag{44}$$

при продолжении по коэффициентам. Оценки (43), (44) получены в предположении, что

$$\|\nabla_h u_h\|_{\gamma_h^*}\leqslant K - const, \tag{45}$$

где γ_h^* – общая часть границы $\mathcal{D}_h$ и $\mathcal{D}_{1h}$, $\nabla_h u_h$ – разностный аналог конормальной производной. Если (45) не имеет места, то правая часть в (43), (44) меняется на $O(\varepsilon/\sqrt{h})$, $O(\varepsilon^2/\sqrt{h})$ соответственно. Для задачи

$$-\sum_{k,m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{km}\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)+cu=f,$$
$$\sum_{k,m=1}^{2}a_{km}\frac{\partial u}{\partial x_m}\cos(n,x_k)_{/\gamma}=0$$

оценка (44) получается без предположения (45). В этом же параграфе исследован вопрос о скорости сходимости неявного итерационного метода переменных направлений для продолжения по коэффициентам и для продолжения типа фиктивный сток. Основной результат, имеющий принципиальное значение, заключается в том, что асимптотическая скорость сходимости итерационного процесса при решении вспомогательной задачи с продолжением типа фиктивный сток та же, что и асимптотическая скорость сходимости того же итерационного процесса при решении основной задачи. Это, несмотря на различия в оценках (43), (44), позволяет отдать предпочтение продолжению типа фиктивный сток.

В § 6 главы Ш приводятся результаты численных расчетов ряда задач методом фиктивных областей. Приводится расчет задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в постановке $\mathcal{P}$, R, доказывающий возможность моделирования условий непротекания в этой постановке в вырожденном случае (Таблица I). Более того, численный расчет показывает, что даже и в невырожденном случае методу фиктивных областей следует отдать предпочтение перед обычной аппроксимацией краевых условий второго рода, особенно в задачах с большими градиентами вблизи границы (Таблица П). Приведены расчеты и двумерных задач (Таблица Ш, рис. I-8). Для геометрии прямоугольник в прямоугольнике рассматриваются задачи с галереями нагнетательных и эксплуатационных скважин, задача о заводнении в пятиточечной системе размещения скважин. Для геометрии круг в квадрате рассматривается задача с галереями нагнетательных и эксплуатационных скважин, расположенных на концентрических окружностях. Эти расчеты вместе с оценками из § 3 позволяют говорить об обоснованности применения метода фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Дальнейшие приводимые в § 6 результаты двумерных расчетов связаны с задачей кручения (Таблицы IУ-УШ). Эта задача формулируется как задача с краевыми условиями различных типов - исходная область полукруг, и как задача с краевым условием первого рода - исходная область круг. Приводимые здесь результаты расчетов полностью подтверждают, а частично и уточняют полученные в §§ 4,5 теоретические оценки. Отметим также расчеты (одномерные и двумерные), связанные с моделированием методом фиктивных областей краевых условий свободного края в задаче об изгибе круглой тонкой пластинки (Таблицы IX-XП, рис. I0-I2). Кроме того, в § 6 приводятся расчеты двумерных задач, связанные с применением метода фиктивных областей в задаче об определении напряженно-деформированного состояния параболического зеркала, установленного на кольцевой опоре (Таблицы XШ - XУ, рис. I3-I9). Приводимые в диссертации расчеты выполнены при участии Ж.Л.Коробицыной, В.И.Крамаренко, С.Б.Кузнецова, В.И.Москаленко, Н.М.Салимовой, Л.Б.Чубарова и Э.В.Чубаровой (Смирновой).

Подводя итог сказанному, можно считать, что для задач теории упругости (динамические и статические) и для задач теории фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости, имеющих важное прикладное значение, решены вопросы обоснования математических моделей и методов их реализации на ЭВМ в связи с созданием Пакетов программ.

Результаты диссертации докладывались на I (Новосибирск, 1969 г.), Ш (Кишинев, 1973 г.), IУ (Лагодехи, 1975 г.), У (Караганда, 1977 г.) Всесоюзных конференциях по численным методам решения задач теории упругости и пластичности; на I (Новосибирск, 1971 г.), П (Рига, 1974 г.), Ш (Алма-Ата, 1976 г.), IУ (Баку, 1978 г.) Всесоюзных семинарах по численному решению задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости; на международных конференциях Пражского политехнического института (Прага, 1973,1975гг); на советско-французских симпозиумах по решению больших систем функциональных уравнений на высокопроизводительных ЭВМ (Новосибирск, 1972,1976 гг.); на Всесоюзной школе по теоретическим исследованиям численных методов механики сплошной среды (Звенигород, 1973 г.); на Всесоюзной школе по численному решению задач математической физики (Казань, 1974, 1976 гг.); на международной конференции "Структура и организация пакетов программ" (Тбилиси, 1976 г.); на семинарах в ИК АН УССР, МГУ им. М.В.Ломоносова, ЛГУ им. А.А.Жданова, КГУ им. Т.Г.Шевченко, ИГ СО АН СССР, ВЦ СО АН СССР. Полностью диссертация докладывалась на семинаре академика Н.Н.Яненко в ИТПМ СО АН СССР и на семинаре академика Г.И. Марчука в ВЦ СО АН СССР. Результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [31] .

1. Коновалов А.Н. Численное решение задач теории упругости. Изд-во НГУ, Новосибирск, 1968, стр. 127.
2. Данилов В.Л., Коновалов А.Н., Якуба С.И. Об уравнениях и краевых задачах теории двухфазных фильтрационных течений в пористой среде. ДАН СССР, 1968, т. 183, № 2, 307-310.
3. Горский Н.М., Коновалов А.Н. О численном решении плоской статической задачи теории упругости в напряжениях. Труды конфе-

ренции по численным методам задач теории упругости и пластичности. Новосибирск, 1969, 55-64.
4. Коновалов А.Н. Об одной системе уравнений в частных производных, возникающих при решении задач фильтрации в потенциалах. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды". Новосибирск, 1970, т.I, № 5, 52-68.
5. Коновалов А.Н. К вопросу о численном решении многомерных задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Известия СО АН СССР, сер.техн., 1970, № 8, 46-54.
6. Коновалов А.Н. Метод расщепления по физическим процессам в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Труды семинара "Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости", Новосибирск, 1972, 119-122.
7. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Изд-во НГУ, Новосибирск, 1972, стр. 128.
8. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1972, т.3, № 5, 52-67.
9. Коновалов А.Н., Яненко Н.Н. Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды. В сборнике "Комплексы программ математической физики", Новосибирск, 1972, 48-54.
10. Коновалов А.Н. О некоторых вопросах, возникающих при численном решении задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Труды мат. института АН СССР им. В.А.Стеклова. Изд-во "Наука", Москва, 1973, т. 122, 3-21.
11. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1973, т.4, № 2, 109-115.
12. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. Acta Politechnica, ČVUT v Praze, ved. konf, 1973, IV, 91-96
13. Коновалов А.Н. Модульный анализ вычислительного алгоритма в задаче планового вытеснения нефти водой. Труды III семинара по комплексам программ математической физики. Новосибирск, 1973, 81-94.
14. Коновалов А.Н. Разностные схемы для численного решения плос-

ких динамических задач теории упругости в напряжениях I. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1973, т.4, № 5, 57-68.

15. Коновалов А.Н. Численное решение плоских динамических задач теории упругости в напряжениях. Всесоюзная школа по теоретическим исследованиям численных методов механики сплошных сред (Звенигород 20-26 XII.1973). Тезисы лекций. Институт проблем механики АН СССР, Москва, 1973, II-I3.

16. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. Всесоюзная школа по теоретическим исследованиям численных методов механики сплошных сред. (Звенигород 20-26 XII.1973). Тезисы докладов. Институт проблем механики АН СССР, Москва, 1973, 25-26.

17. Бугров А.Н., Коновалов А.Н., Щербак В.А. Метод фиктивных областей в плоских статических задачах теории упругости. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1974, т.5, № I, 20-29.

18. Коновалов А.Н., Смирнова Э.В. О модели Баклея-Леверетта фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. ДАН СССР, 1974, т. 216, № 2, 282-284.

19. Коновалов А.Н. Разностные схемы для численного решения плоских динамических задач теории упругости в напряжениях II. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1974, т.5, № 2, 30-45.

20. Горский Н.М., Коновалов А.Н. О разностных методах решения динамических задач теории упругости. Труды III Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, ч.I, Новосибирск, 1974, 68-84.

21. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н. Технологические аспекты численных методов математической физики. *Acta Universitatis Carolinae Mathematica et phisica*, 1974, №1-2, 47-53.

22. Коновалов А.Н. Нестационарная форма уравнений плоской статической задачи теории упругости. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1974, т.5, № 5, 63-77.

23. Коновалов А.Н. Итерационные разностные схемы для численного решения плоской статической задачи теории упругости в напряжениях. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды",

Новосибирск, 1975, т.6, № 2, 52-69.
24. Коновалов А.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей. Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, 1975, 191-199.
25. Коновалов А.Н. О принципах построения Пакета программ для решения задач математической физики. *Acta Politechnica, Práce, ČVUT v Praze, ved. konf, 1975, IV, 37-49*
26. Коновалов А.Н., Карначук В.И. О пакете прикладных программ математической физики. Структура и организация пакетов программ. Международная конференция. (Тезисы докладов). "Мецниереба", Тбилиси, 1976, 51-52.
27. Коновалов А.Н., Монахов В.Н. О некоторых моделях фильтрации многофазных жидкостей. В сборнике "Динамика сплошной среды", вып.27, Новосибирск, 1976, 51-56.
28. Бугров А.Н., Коновалов А.Н., Крамаренко В.И., Метод фиктивных областей в эллиптических задачах с краевыми условиями различных типов. Аэромеханика, "Наука", Москва, 1976, 275-282.
29. Коновалов А.Н., Коробицына Ж.Л. Моделирование краевых условий в задачах фильтрации с помощью метода фиктивных областей. В сборнике "Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости", Новосибирск, 1977, 115-121.
30. Яненко Н.Н., Карначук В.И., Коновалов А.Н. Проблемы математической технологии. В сборнике "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1977, т.8, № 3, 129-157.
31. Коновалов А.Н. О решении вязкоупругих задач в напряжениях. В сборнике "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности I", Новосибирск, 1978, 104-110.

Ответственный за выпуск А.Н.Коновалов

Подписано к печати 30. X. 78. , МН 07775
Усл. печ. л. I.69, Усл. изд. л. I.69. Бесплатно.
Заказ № I50 Тираж I20 экз.

Отпечатано на ротапринте ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 90,
Институтская, 4/I