ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

на правах рукописи

БЕРЕЗИН Юрий Александрович

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

01.04.02 - теоретическая и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 1977

Работа выполнена в Вычислительном центре СО АН СССР и Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

профессор, доктор физико-математических наук

Днестровский Ю.Н.

доктор физико-математических наук

Имшенник В.С.

доктор физико-математических наук

Галеев А.А.

ВЕДУЩЕЕ ПРЕДПРИЯТИЕ - Московский государственный университет, факультет вычислительной математики и кибернетики.

Защита состоится 25 апреля 1978г. в 10 часов на заседании специализированного совета по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук Д.002.94.02 при Институте космических исследований АН СССР, Москва, Профсоюзная, 88.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института космических исследований АН СССР.

Автореферат разослан "   "   1977 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
к.ф.-м.н.   С.Н.Родионов

Диссертация посвящена разработке и реализации с помощью численных методов достаточно полных математических моделей разреженной плазмы и исследованию нелинейных волн в такой плазме. Диссертация основана на работах [I - 25].

К изучению волн конечной амплитуды и ударных волн в сильно разреженной (бесстолкновительной) плазме, где длина свободного пробега частиц относительно парных столкновений не является пространственным масштабом, в последние I0-I5 лет было привлечено большое внимание ученых, работающих в области физики плазмы. Именно такой плазмой является плазма солнечного ветра, имеющая в спокойном состоянии следующие средние параметры: концентрация n == 5 $см^{-3}$, электронная температура $T_e \approx$ I0 эв, ионная температура - в несколько раз меньше, направленная скорость плазмы v = $(3 \div 5)\ 10^{7}$ см/сек, магнитное поле H = $(3 \div 7)\ 10^{-5}$ э.

Поток плазмы солнечного ветра является сверхзвуковым. Согласно измерениям, выполненным с помощью космических аппаратов, при сверхзвуковом обтекании магнитосферы Земли солнечным ветром возникает на расстояниях порядка $15\ R_E$ отошедшая ударная волна (как это имеет место при обтекании затупленных тел сверхзвуковым потоком обычного газа). Однако, в отличие от газодинамики, где толщина фронта ударной волны определяется длиной свободного пробега молекул газа, эта отошедшая ударная волна имеет толщину фронта $\leq 10^{3}$ км, а длина свободного пробега частиц плазмы солнечного ветра относительно парных соударений составляет по порядку величины 10^{8} км. Аналогичная ситуация имеет место и в лабораторных экспериментах с разреженной плазмой.

Диссертация посвящена разработке и реализации с помощью численных методов достаточно полных математических моделей разреженной плазмы и исследованию нелинейных волн в такой плазме. Диссертация основана на работах [I - 25] .

К изучению волн конечной амплитуды и ударных волн в сильно разреженной (бесстолкновительной) плазме, где длина свободного пробега частиц относительно парных столкновений не является пространственным масштабом, в последние I0-I5 лет было привлечено большое внимание ученых, работающих в области физики плазмы. Именно такой плазмой является плазма солнечного ветра, имеющая в спокойном состоянии следующие средние параметры: концентрация n == 5 $см^{-3}$, электронная температура $T_e \approx$ I0 эв, ионная температура - в несколько раз меньше, направленная скорость плазмы v = $(3 \div 5)$ 10^7 см/сек, магнитное поле H = $(3 \div 7)$ 10^{-5} э.

Поток плазмы солнечного ветра является сверхзвуковым. Согласно измерениям, выполненным с помощью космических аппаратов, при сверхзвуковом обтекании магнитосферы Земли солнечным ветром возникает на расстояниях порядка $15 R_E$ отошедшая ударная волна (как это имеет место при обтекании затупленных тел сверхзвуковым потоком обычного газа). Однако, в отличие от газодинамики, где толщина фронта ударной волны определяется длиной свободного пробега молекул газа, эта отошедшая ударная волна имеет толщину фронта $\leq$ 10^3 км, а длина свободного пробега частиц плазмы солнечного ветра относительно парных соударений составляет по порядку величины 10^8 км. Аналогичная ситуация имеет место и в лабораторных экспериментах с разреженной плазмой.

Громадная разница между шириной фронта ударной волны и длиной свободного пробега означает, что близкие взаимодействия (соударения) частиц плазмы не играют роли в формировании ударных волн в сильно разреженной плазме, а определяющими являются эффекты, связанные с коллективным взаимодействием электромагнитного поля и частиц [26 - 29] . Плазма представляет собой среду, в которой спонтанно возникают и развиваются многочисленные микронеустойчивости. Кроме того, в силу дисперсионных свойств в плазме возможно существование регулярных интенсивных колебаний. Коллективными процессами называется нелинейное взаимодействие указанных колебаний и волн друг с другом и с частицами, приводящее к изменению макроскопических характеристик плазмы.

Согласно работам Р.З. Сагдеева [26 - 29], в разреженной плазме могут формироваться ударные волны с шириной фронта, значительно меньшей длины свободного пробега частиц (бесстолкновительные ударные волны), благодаря трем факторам-нелинейности, дисперсии волн малой амплитуды, бесстолкновительной диссипации энергии во фронте волны из-за развития мелкомасштабных неустойчивостей. Эти колебания приводят к возникновению флуктуаций электромагнитного поля, на которых происходит рассеяние частиц, что эквивалентно существенному возрастанию сопротивления плазмы (или увеличению эффективной частоты столкновений, если понимать под столкновениями рассеяние частиц на флуктуционных полях) по сравнению со случаем парных соударений. Волны конечной амплитуды в разреженной плазме, являющиеся предметом изучения в настоящей работе, формируются ,таким образом, при взаимодействии сложных физических процессов (сильная нелинейность, дисперсия, турбулизация), в результате чего появляется большое разнообразие пространственных масштабов дисперсии, частот микронеустойчивостей и т.д. Вся эта совокупность процессов не может быть описана простыми математическими моделями, для изучения которых оказывается возможным использовать только аналитическое рассмотрение. Наиболее общий подход к решению задач динамики разреженной плазмы заключается в применении кинетических уравнений Власова для электронов и ионов с учетом самосогласованных электромагнитных уравнений. Однако, прямое решение этих кинетических моделей даже с привлечением наиболее мощных современных ЭВМ наталкивается на очень серьезные трудности ввиду слишком большой разницы в пространственно-временных масштабах процессов, которые нужно учитывать для достаточно детального описания явлений в бесстолкновительной плазме.

В нашей работе формулируются и исследуются более простые (но содержательные и остающиеся еще весьма сложными) модели, которые можно разделить на две группы с условными названиями "газодинамические" и "комбинированные" (или "гибридные"). Из моделей первой группы наиболее простой является модель, описывающая совместное влияние на формирование волн конечной, но малой амплитуды нелинейности и дисперсии, - уравнение Кортевега-де Вриза. Для изучения более сложных процессов анализируется класс моделей, состоящих из системы уравнений для моментов квазилинейной функции распределения и принимающих во внимание искажение этой функции под влиянием мелкомасштабных волн, связанных с развитием микронеустойчивостей [27, 30 - 32] . При таком подходе эффекты турбулизации включаются самосогласованно через "турбулентные" коэффициенты переноса, которые появляются вследствие взаимодействия частиц плазмы с флуктуационными полями неустойчивостей. Для их определения нужно знать параметры наиболее вероятных и существенных для конкретной задачи микронеустойчивостей (порог возбуждения, эволюцию спектра, уровень насыщения флуктуаций), что,в свою очередь, определяется как сложным взаимодействием этих волн друг с другом, так и обратным влиянием макропараметров плазмы на турбулентные микропроцессы. Во многих задачах, однако, такое рассмотрение может оказаться "превышением точности" (поскольку, как правило, кинетика микронеустойчивостей основывается на теории слабой турбулентности, а в задачах с сильными ударными волнами эта теория может и не быть справедливой). Поэтому часто для определения энергии мелкомасштабных колебаний пользуются приближенными оценками и аппроксимируют изменение импульса частиц при рассеянии на флуктуациях электромагнитного поля выражением, аналогичным макроскопической силе трения между электронами и ионами $m_e\nu(\vec{u}_e - \vec{u}_i)$, где ν - эффективная частота "столкновений" электронов с флуктуационными полями, связанными с коллективными взаимодействиями. Именно такой подход используется нами в изучаемых "газодинамических" моделях.

В сильных бесстолкновительных ударных волнах имеет место явление опрокидывания, поскольку плазменные микронеустойчивости, хотя и определяют в разреженной плазме явления аномальной проводимости и аномальной теплопроводности, не могут скомпенсировать эффекты нелинейности, выше критической. При опрокидывании однопотоковость течения и, соответственно, описание газодинамического типа нарушаются. Для исследования таких ситуаций нами разработан класс комбинированных гибридных моделей, в которых ионная компонента плазмы описывается кинетически, а электронная компонента - газодинамически. Для электронов, ввиду малости ларморовского радиуса, пределы применимости гидродинамического приближения шире, чем для ионов, движение которых в рассматриваемых процессах заведомо не удовлетворяет гидродинамическому (односкоростному) описанию. Использование газодинамики для электронов позволяет устранить несущественные для этих явлений малые пространственные масштабы и высокие частоты, связанные с электронами, и сделать математическую модель реализуемой на находящихся в нашем распоряжении ЭВМ. Заметим, что гибридные модели в последнее время стали использоваться в связи с изучением процессов, происходящих в сильных Θ - пинчах [33, 34].

Разнообразие процессов, которые нужно принимать во внимание при теоретическом изучении плазменных явлений (вязкость, теплопроводность, диффузия, конечная проводимость, анизотропия, многокомпонентность, дисперсия, а иногда излучение и фазовые переходы), приводят к тому, что даже газодинамические модели плазмы в достаточно полной формулировке описываются очень сложными системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. При учете диссипативных процессов в уравнениях появляются вторые производные по пространственным координатам, рассмотрение дисперсионных эффектов возможно только на основе уравнений еще более высокого порядка (появляются третьи производные по пространственным координатам и смешанные по времени и координатам), описание взаимодействия излучения с веществом требует привлечения интегро-дифференциальных уравнений и т.д. В такой ситуации интенсивное использование численных методов расчета подобных моделей для получения полезной информации о плазменных процессах в широкой области изменения параметров становится необходимым.

Диссертация состоит из пяти глав (177 стр, 88 рис., 9 таблиц, библиография 140 названий).

В главе I проводится изучение нестационарных решений уравнения Кортевега- де Вриза (KdV) [35], являющегося моделью для описания волн малой, но конечной амплитуды в первом неисчезающем порядке по отношению к нелинейным и дисперсионным эффектам:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{I}$$

Параметр дисперсии β может быть как положительным, так и отрицательным. Решения при $\beta < 0$ получаются из решений при $\beta > 0$ путем замены $u \to -u$, $x \to -x$; поэтому далее рассматривается только случай $\beta > 0$. Для волн различного типа в плазме уравнение (I) было получено в работах [36 - 39] . Кортевег и де Вриз в [35] показали, что стационарные решения уравнения (I) представляют собой уединенные волны (солитоны) и периодические волны. Солитон определяется формулой

$$u(x,t) = u_0 \, ch^{-2}\{(u_0/12\beta)^{1/2}(x - u_0 t/3)\}, \tag{2}$$

где u_0 - его амплитуда; скорость солитона равна $u_0/3$, ширина - $\ell = (12\beta/u_0)^{1/2}$. Исторически первым нестационарным решением уравнения (I) было полученное в [38] автомодельное решение

$$u(x,t) = \beta\,(3\beta t)^{-2/3}\,\psi\{(3\beta t)^{-1/3} x\}. \tag{3}$$

Функция $\psi(z)$ от автомодельной переменной $z = (3\beta t)^{-1/3} x$ удовлетворяет уравнению

$$\psi''' + \psi\psi' - z\psi' - 2\psi = 0$$

и имеет асимптотику

$$\psi(z) = -\tfrac{1}{2} C z^{1/4} \exp\left(-\tfrac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty,$$

$$\psi(z) = -C|z|^{1/4} \cos\left(\tfrac{2}{3}|z|^{3/2} + \pi/4\right) \quad \text{при} \quad z \to -\infty$$

Как показано в [38] , функция $\psi(z)$ осциллирует с медленно возрастающей амплитудой.

Нестационарные решения KdV, описывающие развитие начальных возмущений различного типа (синусоида, гауссова кривая и др.), были впервые найдены численно в [40, I, 6]. Именно эти численные исследования позволили получить первые (и основные) качественные и количественные результаты по характеру нестационарных течений, описываемых уравнением (I), дали ключ к пониманию этих явлений и к нахождению развитого впоследствии аналитического подхода [4I].

Записывая начальное условие в виде $u(x,0)=u_0 f(x/\ell)$, где u_0 - амплитуда, ℓ - характерный размер начального возмущения, и переходя к новым переменным $u'=u/u_0$, $x'=x/\ell$, $t'=u_0 t/\ell$, получим (штрихи опущены):

$$u_t + uu_x + \sigma^{-2} u_{xxx} = 0, \quad u(x,0)=f(x), \quad \sigma=(u_0\ell^2/\beta)^{1/2}, \tag{3}$$

откуда следует, что течения, соответствующие одному и тому же значению σ и одной и той же безразмерной начальной функции $f(x)$, являются подобными. Параметр подобия σ характеризует степень нелинейности задачи (отношение нелинейности к дисперсии). Считая для солитона $\ell=(12\beta/u_0)^{1/2}$, получим, что для всех солитонов параметр подобия $\sigma=\sigma_s=2\sqrt{3}$. При одной и той же форме начального возмущения $f(x)$ случаям $\sigma \ll \sigma_s$ и $\sigma \gg \sigma_s$ соответствуют качественно различные решения.

В [40] получено численное решение в виде ряда отдельных солитонов, на которые распадается начальное возмущение $u(x,0)=\cos\pi x$. В [I,6] изучены численные решения уравнения (3), соответствующие начальным возмущениям, затухающим при $x\to\pm\infty$. Оказалось, что в общем случае функция $u(x,0)=\exp(-x^2)$ распадается на отдельные солитоны, движущиеся вправо со скоростью, равной трети их амплитуды, и осциллирующий волновой пакет, расширяющийся влево. При $\sigma \gg \sigma_s$ решение состоит практически только из солитонов;

увеличение σ приводит к распаду на большее их число. При $\sigma \ll \sigma_s$ получаются "несолитонные" решения, качественно похожие на автомодельное решение (3). При $\sigma \lesssim \sigma_s$ имеет место решение смешанного типа, содержащее и солитоны, и волновой пакет.

Уравнение (I) имеет бесконечное число законов сохранения, используя которые можно определить амплитуды солитонов, на которые распадается начальное возмущение с $S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dx > 0$, при условии, что несолитонной частью решения можно пренебречь. Для распада начального возмущения с $S_1 > 0$ на два солитона необходимо выполнение условия $\sigma_c < \sigma < 2\sigma_c$, где $\sigma_c^2 = 6\sigma_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx / (\int_{-\infty}^{\infty} f dx)^3$. Если $f(x) = \exp(-x^2)$, то $\sigma_c \approx 4$; в случае $f(x) = ch^{-2} x$ имеем $\sigma_c = \sigma_s$. Значение параметра подобия $\sigma = \sigma_c$ отделяет возмущения, распадающиеся на солитоны, от возмущений, которые эволюционируют другим способом (дают, как правило, один солитон и осциллирующий цуг). При $\sigma > \sigma_c$ $f(x) = \exp(-x^2)$ всегда распадается на солитоны. При $\sigma < \sigma_c$ характер эволюции в качественном отношении не зависит от значения параметра σ: при малых временах в соответствии с законом дисперсии образуются осцилляции, скорость которых отрицательна; их число с течением времени возрастает и цуг расширяется; затем из передней части возмущения формируется солитон, который движется вправо без изменения формы.

Если первый инвариант $S_1 \leq 0$, то распад начального возмущения на одни только солитоны невозможен, поскольку первый инвариант сохраняется, а для солитона он должен быть положительным (напомним, что рассматривается случай положительного параметра дисперсии) Расчеты, проведенные с начальными возмущениями с $S_1 = 0$, показали, что при $\sigma < \sigma_* \approx$ 2.5 решение уравнения (I) в качественном отношении похожа на линейное уравнение с дисперсией, т.е. происходит дисперсионное расплывание волнового пакета и солитоны не образуются; при $\sigma > \sigma_0$ получаются решения смешанного типа - - солитоны плюс волновой пакет. Эти результаты являются общими для всех дисперсионных сред и волновых процессов, когда закон дисперсии имеет вид $\omega/k = v_\phi - \beta k^2$ и амплитуды являются конечными, но малыми. Волны без ограничения на амплитуду рассматриваются в следующих главах.

В главе II изучаются ударные волны при числах Маха, меньших критических, на основе двухкомпонентной газодинамической модели полностью ионизованной квазинейтральной плазмы с учетом дисперсии, проводимости, электронной и ионной теплопроводности, обмена энергией между компонентами плазмы. В коэффициенты переноса введена эффективная частота столкновений $\nu = \nu_{ei} + \nu_{\beta} + \nu_s + \nu_B$, где ν_{ei} - частота кулоновских столкновений, $\nu_{\beta}, \nu_s, \nu_B$ - частоты "столкновений", имеющих коллективную природу и связанных с развитием пучковой, ионнозвуковой и бунемановской неустойчивостей.

С помощью регулярного метода, основанного на анализе типа особых точек уравнений структуры стационарных ударных волн, распространяющихся в плазме с конечной проводимостью и теплопроводностью под произвольным углом к невозмущенному магнитному полю, определены критические параметры, при которых имеет место изомагнитный скачок плотности. Показано, что с увеличением угла θ между плоскостью фронта ударной волны и невозмущенным магнитным полем критическое число Маха M_* монотонно убывает от $M_* \approx 2.76$ при $\theta = 0$ до $M_* = (1 + 3/\sqrt{5})^{1/2} \approx 1.53$ при $\theta = 90^\circ$, если пренебрегать влиянием теплопроводности, и от $M_* = 2\sqrt{3} \approx 3.46$

при $\theta = 0$ до $M_* = (1+\sqrt{3})^{1/2} \approx 1.65$ при $\theta = 90^\circ$ с учетом теплопроводности. Численное решение стационарных уравнений структуры позволило получить зависимость ширины профилей магнитного поля Δ_B и плотности Δ_n от числа Маха при различных углах θ. По мере того как $M \to M_*(\theta)$, ширина профиля магнитного поля $\Delta_B(\theta)$ стремится к некоторому предельному значению $\Delta_B^*(\theta, \nu)$, которое при фиксированной величине ν возрастает с увеличением угла θ. Характер изменения ширины профиля плотности Δ_n в зависимости от числа Маха при различных углах θ качественно один и тот же: резкое уменьшение величины Δ_n (стремление к разрыву-изомагнитному скачку плотности) происходит только в окрестности критического числа Маха $M_*(\theta)$.

Для расчета нестационарных ударных волн, возбуждаемых в разреженной плазме импульсным магнитным полем, разработана конечно-разностная методика, являющаяся обобщением газодинамической схемы "крест". Этот алгоритм дает надежные результаты при числах Маха, не очень близких к критическим. Полная энергия в типичных вариантах сохранялась с точностью до 0,1% за $\approx 10^3$ шагов по времени. Для расчетов вблизи критических чисел Маха разработана полностью консервативная схема, в которой, наряду с полной энергией сохраняются и отдельные виды энергии (кинетическая, магнитная, тепловая). Анализ результатов большой серии расчетов нестационарной задачи показал, что:

1) при малом уровне диссипации и умеренных числах Маха $M < M_*(\theta)$ ударные волны имеют четко выраженный осцилляторный характер, причем при $0 \le \theta \le (m_e/m_i)^{1/2}$ за фронтом имеется ряд осцилляций с пространственным размером порядка $\delta_e = c/\omega_e$

(дисперсия связана с инерцией электронов), при $\theta \leq (m_e/m_i)^{1/2}$ профиль волны состоит из ряда осцилляций с масштабом δ_e за основным фронтом и из ряда осцилляций с масштабом $c\,\theta/\Omega_i$ перед основным фронтом, при $(m_e/m_i)^{1/2} \ll \theta < 90^\circ$ ударная волна имеет осцилляторный предшественник, а за фронтом осцилляции отсутствуют;

2) при $M < M_*(\theta)$, когда выполняются условия раскачки пучковой и ионнозвуковой неустойчивостей и уровень диссипации повышается, регулярная осцилляторная структура ударных волн нарушается; дальнейшее увеличение диссипации приводит к полному подавлению осцилляций и формированию квазистационарной ударной волны с шириной фронта порядка диссипативного размера $c^2/4\pi\sigma V_A(M-1)$;

3) для значений чисел Маха $M < M_*(\theta)$ при наличии теплопроводности имеет место квазистационарный изомагнитный скачок плотности;

4) дальнейшее увеличение амплитуды магнитного поля и соответственно числа Маха ударной волны $(M \to M_*(\theta))$ приводит к сильной нестационарности процесса с непрерывным увеличением крутизны профиля плотности, что указывает на приближение нестационарной волны к фазе опрокидывания; эти критические числа Маха, полученные из численных расчетов, совпадают в пределах 2 ÷ 3 % со значениями $M_*(\theta)$ для стационарного случая.

В главе Ш изучаются ударные волны в закритическом режиме. По мере увеличения амплитуды ударной волны крутизна профиля плотности и скачок потенциала возрастают; когда амплитуда достигает критического значения, происходит опрокидывание волны. Изучение сильных ударных волн непосредственно перед опрокидыванием, в процессе опрокидывания и после него нельзя проводить на основании моделей газодинамического типа, поскольку течение становится многопотоковым, и необходимо использовать кинетический подход. Исходной моделью бесстолкновительной плазмы является система уравнений, состоящая из кинетических уравнений Власова для функций распределения ионов и электронов и уравнений Максвелла с самосогласованными электромагнитными полями. Согласно кинетическим уравнениям, функции распределения изменяются под действием электрического и магнитного полей, которые, в свою очередь, определяются из уравнений Максвелла через моменты функции распределения (плотности заряда и тока). Таким образом, исходная система уравнений Власова-Максвелла является существенно нелинейной, и использование численных методов решения трудно переоценить.

Наиболее универсальным и широко применяемым в настоящее время для решения задач кинетической теории бесстолкновительной плазмы является метод дискретного моделирования (или метод частиц), общая схема которого такова. Плазма представляется набором достаточно большого числа модельных частиц, траектории которых являются характеристиками уравнения Власова. Движение частиц происходит в соответствии с законами классической механики в самосогласованном электромагнитном поле, которое определяется из уравнений Максвелла с использованием зарядов и токов в качестве источников. Плотности этих зарядов и токов, в свою очередь, вычисляются по координатам и скоростям частиц с помощью какой-либо процедуры.

В § III.I. изучается опрокидывание волн на примере задачи о распространении одномерных ионнозвуковых волн в неизотермической плазме. Для этого нами выбрана модель, в которой прослеживается движение только ионной компоненты, а плотность электронов описывается распределением Больцмана $n_e = n_0 \exp(e\varphi/T_e)$, $T_e = const$. В этой задаче газодинамическое приближение нарушается, когда амплитуда потенциала в волне φ_{max} превышает критическое значение $\varphi_* = 1.26\, T_e/e$ [27] . С помощью метода частиц проведены расчеты эволюции начального "разрыва" плотности ионов $\rho(x,0)/\rho_0 = 1 + (C-1)(1+\exp \ell x)^{-1}$, где изменение параметра ℓ позволяет менять крутизну начального профиля плотности, а параметра C – начальный перепад плотности.

При сравнительно небольших значениях C эволюция начального разрыва происходит с образованием идущей вправо ламинарной ударной волны, обладающей осцилляторной структурой, и идущей влево волны разрежения. Такая структура фронта волны обусловливается отклонением от квазинейтральности, пространственный размер осцилляций определяется величиной длины дисперсии, в данном случае – дебаевским радиусом $D = (T_e/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$. Амплитуда переднего солитона нарастает до некоторого значения $\varphi_{max} < \varphi_*$, оставаясь далее постоянной; опрокидывания и перемешивания частиц не происходит. Такая картина имеет место при начальных перепадах плотности $C < 5$. При больших перепадах плотности ($5 < C \lesssim 13$) амплитуда переднего солитона с течением времени возрастает до значения $\varphi_{max} > \varphi_*$, в результате чего происходит опрокидывание фронта волны с образованием предшественника на профиле потенциала и появлением быстрых частиц, отраженных фронтом (потенциальным барьером); регулярная осцилляторная структура волны нарушается.

Если потенциал $\bar{\varphi}$ за фронтом волны меньше критического значения φ_*, то выброс частиц имеет пульсационный характер: после нарастания амплитуды переднего солитона до $\varphi_{max} \gtrsim \varphi_*$ происходит отражение некоторого числа частиц фронтом, уменьшение амплитуды переднего солитона до $\varphi < \varphi_*$, затем снова рост за счет энергии ступеньки, выброс новой группы частиц и т.д. Этот факт был отмечен в [42] для задачи об эволюции симметричного начального сжатия в рамках такой же модели.

Увеличение амплитуды ступеньки C и, соответственно, амплитуды потенциала $\bar{\varphi}$ ($C > 13$, $\bar{\varphi} > \varphi_*$) приводит к формированию ударной волны без регулярных осцилляций, но с резким фронтом между основной частью волны и предшественником. При этом происходит непрерывное отражение частиц, формирование предшественника сопровождается торможением основной волны.

Если $C > 13$ и $\varphi_* < \bar{\varphi} \leq 2.4$, то формируется ударная волна с резким профилем между основной волной и предшественником; на профиле потенциала осцилляции отсутствуют, происходит непрерывное отражение частиц фронтом.

Расчеты, выполненные для случаев $\bar{\varphi} > 2.4$, показывают, что имеет место качественная перестройка характера процесса – – вместо образования ударной волны происходит непрерывное расплывание начального профиля.

Во всех расчетах использовалось 10 тысяч частиц, длина расчетного интервала составляла 150 дебаевских радиусов. Контроль точности осуществлялся путем проверки закона сохранения энергии; в типичных расчетах относительное отклонение энергии составляло $0,3 \div 0,5\%$.

В § Ш.2 рассмотрены сильные бесстолкновительные ударные волны в плазме с магнитным полем. Эта задача значительно сложнее предыдущей, поскольку при наличии магнитного поля необходимо рассчитывать движение как ионов, так и электронов. В связи с существенной разницей в пространственно-временных масштабах движения электронов и ионов; прямое использование метода частиц для решения кинетических уравнений ионной и электронной компонент очень затруднительно, т.к. для получения хорошей точности расчета требуется недоступно большое число частиц и временных шагов. Поэтому исследование ударных волн с амплитудами порядка или выше критических в бесстолкновительной плазме с магнитным полем проведено на основе разработанной нами комбинированной (гибридной) модели, в которой ионы описываются кинетическим уравнением Власова, а электроны - уравнениями газодинамического типа. Для электронной компоненты пределы применимости газодинамического описания в плазме с магнитным полем шире, чем для компоненты ионной, ввиду меньшего ларморовского радиуса.

По комбинированной модели были проведены расчеты эволюции "ступеньки" плотности и магнитного поля $\rho(x,0)/\rho_0 = H(x,0)/H_0 = 1 + (A-1)(1+\exp \ell x)^{-1}$. При начальных перепадах плотности и магнитного поля $A <$ I2 эволюция ступеньки приводит к образованию идущей вправо ламинарной ударной волны с докритическими параметрами и распространяющейся в противоположную сторону волны разрежения. Ударная волна имеет осцилляторный фронт, обусловленный дисперсией, связанной с инерцией электронов. Масштаб осцилляций определяется длиной дисперсии $\delta_e = c/\omega_e$. Диссипативный размер, обусловленный конечной проводимостью, равен $\delta_d = c^2/4\pi\sigma V_A (M-1)$; в описываемой серии расчетов $\delta_d = 0{,}2\ c/\Omega_i$. Наличие конечной проводимости определяет бо́льшую ширину профиля магнитного поля по сравнению с профилем продольной скорости и плотности частиц плазмы. Опрокидывания фронта и перемешивания частиц не происходит. Эти результаты полностью совпадают с результатами расчета по двухкомпонентной газодинамической модели.

С увеличением начального перепада плотности характер течения изменяется. При I2 $<$ A $<$ 25 ударная волна при небольших временах с начала распада разрыва является нестационарной ламинарной волной с осцилляторным фронтом. Но с течением времни амплитуда передней осцилляции профиля продольной скорости ионов (и электронов) возрастает до критической, происходит опрокидывание волны с образованием группы быстрых частиц, отраженных фронтом, и предшественника на профиле магнитного поля. После выброса частиц из передней осцилляции ее амплитуда уменьшается, затем амплитуда следующей осцилляции возрастает до критической, из нее происходит выброс частиц и т.д. Уменьшение амплитуды передней осцилляции и образование быстрых частиц сопровождается замедлением ударной волны. Затем скорость волны увеличивается, возникает новая группа быстрых частиц и т.д. В результате имеет место пульсационный режим.

При A $\gtrsim$ 25 характер распада разрыва снова изменяется. В этом случае амплитуда ударной волны всегда остается сверхкритической и выброс частиц осуществляется непрерывно. На профиле магнитного поля формируется четко выраженный предшественник, отличающийся по амплитуде и скорости от основного фронта. Пространственный размер этого предшественника определяется ларморовским радиусом ионов. В отличие от сильной ударной волны в неизотермической плазме без магнитного поля, когда скорость предшественника равна максимальной скорости ионов, в этом случае скорость предшественника меньше максимальной продольной скорости ионов, что связано с влиянием магнитного поля, заворачивающего частицы.

В главе IУ изучена шланговая неустойчивость альфвеновских волн, играющих важную роль в процессах, происходящих в плазме солнечного ветра. Измерения, выполненные на космических аппаратах, показали, что эта плазма является анизотропной: $p_\parallel \neq p_\perp$, где $p_\parallel$ ($p_\perp$) – продольное (поперечное) по отношению к невозмущенному магнитному полю $\vec{H}_0$ давление. Из линейного анализа соответствующих кинетических уравнений, альфвеновские волны, распространяющиеся вдоль постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$, при выполнении условия $p_\parallel > p_\perp + H_0^2/4\pi$ неустойчивы.

Поскольку указанный критерий неустойчивости альфвеновских волн не зависит от детального вида функции распределения частиц, а определяется макроскопическими характеристиками, то естественно ожидать, что эта неустойчивость, называемая шланговой, может быть достаточно хорошо описана в рамках уравнений гидродинамического типа. Конечно, в таком рассмотрении необходимо ограничиться волнами с $\lambda \gg R$ (где R – ларморовский радиус частиц).

В качестве исходной модели разреженной анизотропной плазмы выбрана модель Чу, Голдбергера, Лоу (ЧГЛ) с учетом конечной величины ларморовского радиуса ионов [43]. Альфвеновские волны описываются следующей системой уравнений:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\Big\{(p_\parallel - p_\perp) H_0 H_x / H^2 - H_0 H_x / 4\pi -$$

$$- \Omega^{-1}\Big(p_\perp + \frac{p_\parallel - p_\perp}{H^2} H_0^2\Big)\frac{\partial v}{\partial z}\Big\} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\Big\{(p_\parallel - p_\perp) H_0 H_y / H^2 - H_0 H_y / 4\pi +$$

$$+ \Omega^{-1}\Big(p_\perp + \frac{p_\parallel - p_\perp}{H^2} H_0^2\Big)\frac{\partial u}{\partial z}\Big\} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = H_0 \frac{\partial u}{\partial z} , \qquad \frac{\partial H_y}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v}{\partial z} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_\parallel H^2) = \frac{\partial}{\partial t} (p_\perp / H) = 0 ,$$

где $u = u_x$, $v = u_y$, $\rho = const$, $H^2 = H_0^2 + H_x^2 + H_y^2$, $\Omega = eH_0/m_i c$. Линейный анализ системы (4) дает $\omega_k = \omega^{(k)} + i\gamma_k$, $\omega^{(k)} = \frac{1}{2} \Omega k^2 R^2$, $\gamma_k = \Omega k R \left[\Delta p / p_\parallel - k^2 R^2 / 4 \right]^{1/2}$, где $R = \Omega^{-1} (p_\parallel / \rho)^{1/2}$ – ларморовский радиус ионов, γ_k – инкремент роста малых возмущений, $\Delta p = p_\parallel - p_\perp - H_0^2/4\pi$ – степень анизотропии плазмы. Из выражения для инкремента следует, что при выполнении условия $p_\parallel > p_\perp + H_0^2/4\pi$ в анизотропной плазме альфвеновские волны с $kR \lesssim 2 (\Delta p / p_\parallel)^{1/2}$ будут неустойчивыми.

Рассматривая случай малых, но конечных амплитуд $H_x^2 + H_y^2 \equiv H_\perp^2 \ll H_0^2$ и вводя новые переменные $t' = (\Delta p / p_\parallel^\circ) \Omega t$, $z' = (\rho \Delta p)^{1/2} (p_\parallel^\circ)^{-1} \Omega z$, $H', B' = \left[(2 p_\parallel^\circ - \frac{1}{2} p_\perp^\circ) / \Delta p \right]^{1/2} H, B$, $u', v' = \left[\rho (2 p_\parallel^\circ - \frac{1}{2} p_\perp^\circ) \right]^{1/2} (\Delta p)^{-1} u, v$ из системы (4) получим (штрихи опущены):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 - H_\perp^2) H - \frac{\partial v}{\partial z} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 - H_\perp^2) B + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} , \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} ,$$

где $H_\perp^2 = H^2 + B^2$.

Поскольку замена переменных позволила в системе (4) устранить все коэффициенты, связанные с конкретным состоянием плазмы ($p_{\parallel}^{0}$ $p_{\perp}^{0}$, Ω), то решения задачи о шланговой неустойчивости в анизотропной разреженной плазме для различных параметров при малых, но конечных магнитных полях $H_{\perp}$ будут подобными. Система уравнений (5) является удобной моделью для исследования неустойчивых альфвеновских волн, поскольку она существенно проще исходной, но сохраняет все черты рассматриваемого явления – рост малых возмущений вследствие неустойчивости, ограничение амплитуды нелинейностью и стабилизацию коротковолновых возмущений под действием "магнитной" вязкости. Эта система уравнений представляет и самостоятельный математический интерес.

Инкремент роста малых возмущений в этом приближении равен $\gamma_k = k(1-k^2/4)^{1/2}$; максимальной скоростью роста обладает гармоника с $k = 2^{1/2}$, для нее γ_k = I. Система (5) имеет частное решение в виде волны с круговой поляризацией $H(z,t) = A(t)\sin(kz + \varphi(t))$, $B(z,t) = A(t)\cos(kz+\varphi(t))$. Амплитуда и фаза этой волны описываются уравнениями $\dot{\varphi}(t) = -\frac{1}{2}k^2 + CA^{-2}(t)$, $\ddot{A} - \gamma_k^2 A + k^2 A^3 - C^2 A^{-3} = 0$, где постоянная интегрирования $C = A_0^2(\dot{\varphi}(0) + \frac{1}{2}k^2)$. Согласно этим уравнениям, с течением времени происходят колебания амплитуды нелинейной альфвеновской волны от $A_{min} = A_0$ до $A_{max} = (2 - \frac{1}{2}k^2)^{1/2}$ (в случае C = 0). Период этих колебаний определяется приближенной формулой $T \approx 2\gamma_k^{-1} \ln(8\gamma_k^2/k^2A_0^2)$. Рост амплитуды волны с круговой поляризацией происходит за счет уменьшения степени анизотропии плазмы. Это решение соответствует определенному выбору начальных условий. В случае произвольных начальных условий систему (5) нужно интегрировать численно. Нами проведено сравнение спектрального метода и ряда конечно-разностных схем (явная, неявная, предиктор-корректор, итерационная) по следующим характеристикам: величина области неустойчивости, значения инкрементов, сохранение энергии, близость к точному решению (волна, поляризованная по кругу). Оптимальной для рассматриваемой задачи оказалась итерационная схема. Расчеты по этой схеме показывают, что если в момент $t = 0$ задать случайное распределение функций u, v, H, B с малыми амплитудами, то сначала каждая гармоника, соответствующая волновому числу k из области неустойчивости, возрастает пропорционально $\exp(\gamma_k t)$. Когда амплитуды гармоник становятся достаточно большими, начинается нелинейное взаимодействие между ними, в результате чего с течением времени устанавливается квазистационарный режим. Средний квадрат поперечного магнитного поля $\langle H_\perp^2 \rangle$ испытывает случайные колебания около некоторого уровня, который не зависит от распределения заданной начальной энергии по гармоникам. Бо̀льшая часть энергии постепенно перекачивается в длинноволновые гармоники.

По итерационной разностной схеме была проведена серия расчетов системы (4) с начальными условиями в виде монохроматической поляризованной по кругу волны и случайного набора других волн со значительно меньшими амплитудами (шумы). Анализ результатов численного решения задачи о шланговой неустойчивости альфвеновской волны с круговой поляризацией при наличии шумов в широкой области параметров показывает, что:

I) имеются регулярные нелинейные колебания при временах порядка $10 \div 20\ \gamma^{-1}$, хорошо совпадающие с аналитическим решением (γ - инкремент основной волны);

2) при бо̀льших временах происходит стохастизация магнитного

поля и переход в квазистационарный режим;

3) квазистационарный уровень осредненного турбулентного магнитного поля возрастает с увеличением степени анизотропии плазмы;

4) энергия магнитного поля по мере развития турбулентности перекачивается из основной гармоники, задаваемой начальным возмущением, в длинноволновую часть спектра.

Численное решение задачи с несколькими поляризованными по кругу альфвеновскими волнами, отличающимися длинами волн и амплитудами, показывают отсутствие возврата магнитного давления и независимость квазистационарного уровня от условий возбуждения неустойчивости.

Для изучения влияния шланговой неустойчивости на структуру ударной волны была проведена серия расчетов при наличии продольного движения с начальным импульсом сжатия в виде звуковой римановой волны и поперечного возмущения в виде поляризованной по кругу альфвеновской волны. В области сжатия степень анизотропии плазмы больше, чем вне этой области, т.к. продольное давление пропорционально ρ^3 , а поперечное пропорционально ρ . Поэтому в пределах области сжатия, где плотность плазмы больше невозмущенной, неустойчивость развивается быстрее, поскольку инкремент шланговой неустойчивости пропорционален разности продольного и поперечного давлений. Развитие шланговой неустойчивости приводит к уменьшению крутизны фронта звуковой волны, что можно интерпретировать как появление турбулентной вязкости, связанной с флуктуациями параметров плазмы и электромагнитного поля при этой неустойчивости, обусловленной анизотропией давлений.

В главе У проведено численное решение самосогласованной задачи о формировании отошедших ударных волн, возникающих при обтекании осесимметричных затупленных тел сверхзвуковым потоком полностью ионизованной вязкой теплопроводной плазмы с конечной проводимостью, что можно рассматривать как некоторый (конечно, весьма упрощенный) подход к моделированию взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли. В качестве исходных уравнений нами выбраны уравнения магнитной газодинамики с учетом самосогласованного магнитного поля, вязкости, теплопроводности, проводимости. Дисперсионными эффектами пренебрегается, что возможно в условиях сильной турбулизации плазмы в зоне отошедшей ударной волны.

Для решения этой задачи в "естественных" координатах, связанных с поверхностью обтекаемого тела, разработана эффективная конечно-разностная методика, основанная на широко используемом в настоящее время принципе расщепления по пространственным координатам и физическим процессам. По этой разностной схеме проведена серия расчетов течений нейтрального газа и плазмы около сферы (осесимметричный случай) и цилиндра (плоский случай). Для получения стационарного решения было необходимо 150 $\div$ 300 итераций. Расчеты в широком диапазоне чисел Альфвена-Маха, Рейнольдса, магнитного числа Рейнольдса позволили получить структуру отошедших ударных волн и показали, что увеличение магнитного поля в потоке перед телом приводит к поджатию ударной волны к телу при $0 \leq \theta \leq 30^\circ$ (где θ - угол, отсчитываемый от линии торможения по часовой стрелке), а при $\theta \gtrsim 60^\circ$ - к отжатию ударной волны от тела. Разностный алгоритм построен таким образом, что в него достаточно легко могут быть включены эффекты диссипации, связанной с коллективным взаимодействием.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

I) У Рижское совещание по магнитной гидродинамике, Рига, I966;

2) П Международный коллоквиум по газодинамике взрыва и реагирующих систем, Новосибирск, I969;

3) Международная конференция по теории плазмы, Киев, I97I;

4) Конференция по численным методам в физике плазмы, Звенигород, I974;

5) Всесоюзная школа-семинар по моделям сплошной среды, Ленинград, I975;

6) IУ Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Киев, I976;

7) Семинар под рук. академика А.А.Самарского (ИПМ АН СССР);

8) Семинар по тепломассообмену (ЛГУ);

9) Семинар под рук. член-корр. АН СССР Д.Д.Рютова (ИЯФ СО АН СССР);

I0) Семинар под рук. проф. Г.А.Тирского (Институт механики МГУ);

II) Семинар под рук. профессора Ж.Л.Лионса (IRIA, Франция).

Литература

I. Ю.А.Березин, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 51, I557 (I966).

2. Ю.А.Березин. ПМТФ, № I, I07 (I966).

3. Ю.А.Березин, Р.Х.Куртмуллаев, Ю.Е.Нестерихин. ФГВ, № I, 3 (I966).

4. Ю.А.Березин, Р.Х.Куртмуллаев. ФГВ, № 3, 3 (I966).

5. Ю.А.Березин, Р.Х.Куртмуллаев. ПМТФ, № I, II6 (I967).

6. Ю.А.Березин. ЖТФ, 38, 24 (I968).

7. Ю.А.Березин, Р.З.Сагдеев. ДАН СССР, I84, 570 (I969).

8. Ю.А.Березин, Г.И.Дудникова, В.Г.Еселевич, Р.Х.Куртмуллаев. ПМТФ, № 4, 99 (I969).

9. Ю.А.Березин. ПМТФ, № 3, 3 (I970).

I0. Ю.А.Березин. Численные методы механики сплошной среды, I, 44 (I970).

II. Ю.А.Березин. ЖЭТФ, 6I, I877 (I97I).

I2. Ю.А.Березин, Г.И.Дудникова. ПМТФ, № I, I4I (I97I).

I3. Ю.А.Березин, Г.И.Дудникова. ПМТФ, № 2, 8 (I972).

I4. Ю.А.Березин, В.А.Вшивков. Численные методы механики сплошной среды, 3, (I972).

I5. Ю.А.Березин. Численные методы механики сплошной среды, 4, 20 (I973).

I6. Ю.А.Березин, В.А.Вшивков. ПМТФ, № I, I52 (I973).

I7. Ю.А.Березин, В.М.Ковеня. Численные методы механики сплошной среды, 4, I5 (I973).

I8. Yu.A.Berezin, V.M.Kovenya, N.N.Yanenko. Lect. Notes in Physics, No.35 (1975).

I9. Yu.A.Berezin, V.M.Kovenya, N.N.Yanenko. Computers and Fluids, 3, No.2/3 (1975).

20. Yu.A.Berezin, V.A.Vshivkov. J.Comp.Phys., 20, 81 (1976).

2I. Ю.А.Березин, В.А.Вшивков. ПМТФ, № 2, 27 (I976).

22. Ю.А.Березин, В.А.Вшивков, Г.И.Дудникова. ПМТФ, № 5, 58 (I976).

23. Ю.А.Березин, В.А.Вшивков. Физика плазмы, 3, 365 (I977).

24. Ю.А.Березин. Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск, "Наука", I977.

25 Yu.A.Berezin, V.A.Vshivkov. Lect. Notes in Math., 1977 (in press).

26. Р.З.Сагдеев. ЖТФ, 3I, II85 (I96I).

27. Р.З.Сагдеев. Вопросы теории плазмы, вып. 4, М., Атомиздат, I964.

28. C.F.Kennel, R.Z.Sagdeev. J.Geophys.Res., 72, 3303, 3327 (1967).

29. R.Z.Sagdeev. Proc. Symp. Appl. Math., New York, 18, 281 (1967).

30. Б.Б.Кадомцев. Вопросы теории плазмы, вып. 4, М., Атомиздат, I964.

3I. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев. Вопросы теории плазмы, вып. 7, М., Атомиздат, I973.

32. P.C.Liewer, N.A.Krall. Phys.Rev.Let., 30, 1242 (1973).

33. A.G.Sgro, C.W.Nielson. Phys.Fluids, 19, 126 (1976).

34. S.Hamasaki, N.A.Krall, C.E.Wagner, R.N.Byrne. Phys. Fluids, 20, 65 (1977).

35. D.J.Korteweg, G. de Vries. Phil.Mag., 39, 442 (1895).

36. В.Е.Захаров. ПМТФ, № 3, I67 (I964).

37. Ю.А.Березин. ПМТФ, № 6, 26 (I965).

38. Ю.А.Березин, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 46, I880 (I964).

39. H.Washimi, T.Taniuti. Phys.Rev.Let., 17, 966 (1966).

40. N.J.Zabusky, M.D.Kruskal. Phys.Rev.Let., 15, 240 (1965).

41. C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura. Phys.Rev. Let., 19, 1095 (1967).

42. С.Г.Алиханов, Р.З.Сагдеев, П.З.Чеботаев. ЖЭТФ, 57, I565 (I969).

43. Г.М.Заславский, С.С.Моисеев. ПМТФ, № 6, II9 (I962).

Подписано к печати I0.XI-77г.   МН-03049

Формат 60х84/16 Бумага писчая № 1

Печ. л. I,6 Тираж 150 экз. Заказ № I88

Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР

Новосибирск, 90 Ротапринт