А 75/21795

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Р С Ф С Р

УЧЁНЫЙ СОВЕТ ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ ПРИ НОВОСИБИРСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

На правах рукописи

РАСПОПОВ ВИТАЛИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ И НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(01.003 - дифференциальные уравнения)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск 1975

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Р С Ф С Р

УЧЁНЫЙ СОВЕТ ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ ПРИ НОВОСИБИРСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

На правах рукописи

РАСПОПОВ ВИТАЛИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ И НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(01.003 - дифференциальные уравнения)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 1975

Сверено
1989 г.

Сверен
1988г.

Работа выполнена на кафедре Вычислительных методов механики сплошной среды Новосибирского государственного университета и кафедре Вычислительной математики Красноярского государственного университета.

Научный руководитель:
академик Н.Н.ЯНЕНКО

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Н.Х.ИБРАГИМОВ,
кандидат физико-математических наук
Л.В.КОМАРОВСКИЙ

Ведущая организация:
Институт математики СО АН СССР

Автореферат разослан " ' . . сентября . . 1975 г. №
Защита диссертации состоится "27" . октября . . . 1975 г. в . I5 . час. на заседании Учёного Совета по присуждению учёных степеней по математике и механике при Новосибирском государственном университете по адресу:
Новосибирск - 630090, Пирогова 2, аудитория 442 .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НГУ.

Учёный секретарь Совета
доктор физико-математических наук
Ю.Мерзляков
Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

Важной задачей теории дифференциальных уравнений является выделение и изучение классов частных решений систем дифференциальных уравнений.

Для построения точных решений систем дифференциальных уравнений с частными производными применяются в основном два метода: метод основанный на изучении групповых свойств дифференциальных уравнений [2, 3] и метод дифференциальных связей [9, 12].

Диссертация посвящена применению метода дифференциальных связей к системам квазилинейных уравнений первого порядка и к уравнениям высших порядков и некоторым аналитическим исследованиям, связанными с построением точных решений систем уравнений с частными производными.

Метод дифференциальных связей был предложен Н.Н.Яненко [12]. Суть метода заключается в следующем. К данной системе дифференциальных уравнений

$$F_i\left(x_j, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^p u_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)=0, \qquad (S)$$

$$i,k=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n;\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=p,$$

присоединяется система дополнительных дифференциальных соотношений (дифференциальных связей)

$$\Phi_\alpha\left(x_j, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^{p_{\alpha k}} u_k}{\partial x_1^{\lambda_1}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}}\right)=0, \qquad (D)$$

$$\alpha=1,\ldots,r;\quad \lambda_1+\cdots+\lambda_n=p_{\alpha k}$$

Получившаяся таким образом переопределённая система (SD) исследуется на совместность. Условия совместности будут представлять собой в общем случае уравнения в частных производных на F_i и Φ_α. Если система (SD) совместна, то можно искать её решения, которые будут частными решениями системы (S). Решения системы (SD) отыскиваются, как правило, проще, чем решения системы (S), так как произвол решения системы (SD) уже, чем системы (S).

В первом параграфе рассмотрены вопросы существования дифференциальных связей первого порядка

$$\Phi_\alpha\left(\frac{\partial u_1}{\partial t},\ldots,\frac{\partial u_n}{\partial t},\frac{\partial u_1}{\partial x},\ldots,\frac{\partial u_n}{\partial x},u_1,\ldots,u_n,x,t\right)=0, \qquad (\mathrm{I})$$
$$\alpha=2,3,$$

совместных с системами квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}=b_i, \qquad (2)$$
$$a_{ij}=a_{ij}(u_1,\ldots,u_n,x,t),\ b_i=b_i(u_1,\ldots,u_n,x,t),$$
$$i=1,\ldots,n;\quad n=2,3,$$

с функциональным произволом в решении. Найдены условия совместности системы уравнений (I), (2) и показано, что в зависимости от коэффициентов системы (2) дифференциальные связи (I) могут быть как квазилинейными, так и нелинейными. Полученные результаты сформулированы в виде теорем. Доказано, что одна и две дифференциальные связи первого порядка, совместные с уравнениями одномерной газовой динамики с максимально возможным функциональным произволом, являются квазилинейными.

Во втором и третьем параграфах рассмотрены все дифференциальные связи первого порядка, совместные с одно и двухфункциональным произволом решения с уравнениями одномерной газовой динамики, взятыми в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad a^2(p,x)\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (3)$$
$$\tau=\varphi(p,S),\quad a^2(p,x)=-\frac{\partial\varphi(p,S(x))}{\partial p}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\tau}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (4)$$
$$S=S(p,\tau),\quad A=\frac{\partial S}{\partial\tau}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^{-1}=A(p,\tau)$$

(u – скорость, τ – удельный объём, p – давление, S – энтропия). Показано, что многообразие уравнений состояния, при которых существует дифференциальная связь первого порядка, совместная с однофункциональным произволом в решении с уравнениями (3), зависит от трёх произвольных функций одного аргумента, причём уравнения состояния, при которых существуют решения, рассмотренные в [I, I3, I4] являются частными по отношению к полученным здесь.

С помощью найденных дифференциальных связей построены новые точные решения уравнений одномерной газовой динамики, содержащие произвольные функции. Решены конкретные физические задачи:

I. Задача о движении поршня, который начинает двигаться при $t = 0$ по закону $u = U(t)$, $U(0) = 0$, причём при $t = 0$ u и p вполне определённые функции отличные от констант, и задан специальный закон распределения энтропии.

2. Задача о течении газа за ударной волной, когда перед фронтом ударной волны заданы $u_0 = const.$, $p_0 = const.$, $\rho_0 = \rho_0(x)$, а параметры газа за ударной волной, определяются с помощью указанных решений уравнений (3), содержащих одну произвольную функцию.

В обеих задачах рассматривался политропный газ.

3. Задана контактная полоса ($u_0 = 0$, $p_0 = const.$, $S = S(x)$, где $S(x)$ – произвольная функция), ограниченная слева поршнем $x = x_0$. Поршень движется по заданному закону $u = U(t) > 0$, $U(0) = 0$. Определить параметры движущегося газа.

Во второй главе изучаются дифференциальные связи, совместные с уравнениями второго и третьего порядков в случае двух независимых переменных. Впервые строятся дифференциальные связи второго порядка, совместные с уравнениями второго порядка с функциональным и константным произволом. Можно отметить, что в то время как не существует промежуточный интеграл для уравнения второго порядка, дифференциальная связь второго порядка, совместная с ним с функциональным произволом в решении, может существовать. Отсюда следует, что дифференциальная связь второго порядка и промежуточный интеграл выделяют различные классы решений уравнения второго порядка. Показано, что метод дифференциальных связей можно применять и для существенно нелинейного уравнения второго порядка.

Для уравнения третьего порядка (конкретно рассматривалось модельное уравнение, описывающее течение одномерного вязкого газа) построена дифференциальная связь второго порядка, совместная с ним с двухфункциональным произволом в решении. Найденное уравнение второго порядка не допускает ни промежуточного интеграла, ни дифференциальной связи второго порядка, совместной с ним с функциональным произволом в решении. Однако показано, что существует бесчисленное множество дифференциальных связей первого порядка, совместных с ним с константным произволом в решении. Тем самым, вообще говоря, можно получать бесчисленное множество решений с константным произволом исходного уравнения третьего порядка. Приведён пример решения.

Следует отметить, что вопрос построения "промежуточного интеграла" второго порядка для уравнений третьего порядка при двух независимых переменных впервые был рассмотрен В.Романовским [10].

В первом параграфе третьей главы для системы уравнений

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = C\,, \quad u = \{u_1, u_2\} \tag{5}$$

где матрицы A, B и вектор C зависят только от u_1, u_2 (матрица A неособая), проведено преобразование годографа. В отличие от однородных уравнений система (5) с помощью преобразования годографа сводится к уравнению второго порядка относительно одной неизвестной функции. В одном частном случае получена линейная система.

Во втором параграфе интегрирование уравнений, описывающих течения газа со сферической и цилиндрической симметрией, сводится к интегрированию уравнений высшего порядка в пространстве годографа и вполне интегрируемой системы в пространстве независимых переменных.

Как известно, метод построения общего интеграла по известному полному интегралу (метод огибающих), хорошо развитый, для одного уравнения в частных производных, не всегда применим для системы уравнений [9]. В последнем параграфе по известному полному интегралу консервативной системы уравнений построена огибающая, доказано, что в случае уравнений одномерной газовой динамики, эта огибающая есть общее решение. Показано, как строить полный интеграл консервативной системы уравнений в случае трёх независимых переменных и построена его огибающая, которая является простой волной. Таким образом, показано, что методом огибающих можно получить общие решения систем уравнений и строить классы частных решений, которые выделяются дифференциальными связями. Результаты этого параграфа содержатся в трёх теоремах.

Исследование на совместность переопределённых систем везде осуществляется методом Картана [II] или скобками Пуассона.

Основные результаты диссертации докладывались на IУ Всесоюзном совещании по аналитическим методам в газовой динамике (г.Фрунзе, 1970), на семинаре по вычислительным методам механики сплошной среды в НГУ под руководством академика Н.Н.Яненко, на семинаре теоретического отдела Института гидродинамики СО АН СССР под руководством член-корр. АН СССР Л.В.Овсянникова и опубликованы в работах [4]-[8].

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю академику Н.Н.Яненко за постоянное внимание и руководство работой, а также сотрудникам отделения механики сплошной среды Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР и особенно В.П.Шапееву за полезные дискуссии и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.С.Завьялов. О некоторых интегралах одномерного движения газа. ДАН СССР, 1955, 103, 5.
2. Л.В.Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962, Изд-во СО АН СССР.
3. Л.В.Овсянников. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1966, Изд-во НГУ.
4. В.Е.Распопов. Вид дифференциальных связей, совместных с системами квазилинейных уравнений. Сб."Численные методы механики сплошной среды", 1975, т.6, № 2.
5. В.Е.Распопов, В.П.Шапеев. Об огибающих одного частного ре- решения консервативных систем уравнений. Сб. "Численные методы механики сплошной среды", 1970, т.1, № 5.
6. В.Е.Распопов, В.П.Шапеев. Преобразование годографа для системы двух неоднородных уравнений. Сб."Численные методы механики сплошной среды", 1970, т.1, № 1.
7. В.Е.Распопов. Преобразование уравнений, описывающих течения газа с цилиндрической и сферической симметрией. Сб. "Численные методы механики сплошной среды", 1973, т.4, № 5.
8. В.Е.Распопов, В.П.Шапеев, Н.Н.Яненко. Применение метода дифференциальных связей к одномерным уравнениям газовой динамики. Сб."Численные методы механики сплошной среды", 1971, т.2, № 5.
9. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М., 1968, "Наука".
10. В.Романовский. К теории интегрирования дифференциальных уравнений. Варшава, 1911.
11. С.П.Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.-Л.,1948.
12. Н.Н.Яненко. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Труды IV Всесоюзного матем. съезда, 1964.
13. M.H.Martin. The Monge-Ampere partial differential equation $rt-s^2+\lambda^2=0$. Pacif. J.Math., 3, 1953.
14. G.S.S.Ludford. Generalized Riemann invariants. Pacif.J.Math. 5, 1955.

Подписано в печать 16.09.75
Бумага 60x84, 1/16. 0,5 п.л.
Заказ № 700

МН 07480
Тираж 220

Ротапринт НГУ

630090, Новосибирск