А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет Секции по прочности материалов и технологии машиностроения Объединенного ученого совета по физико-математическим и техническим наукам СО АН СССР

На правах рукописи

ШАПЕЕВ ВАСИЛИЙ ПАВЛОВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ К СИСТЕМЕ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

(0I.02.04 - механика деформируемого твердого тела)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск - I974

А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет Секции по прочности материалов и технологии машиностроения Объединенного ученого совета по физико-математическим и техническим наукам СО АН СССР

На правах рукописи

ШАПЕЕВ ВАСИЛИЙ ПАВЛОВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ К СИСТЕМЕ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

(01.02.04 - механика деформируемого твердого тела)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 1974

Работа выполнена в Вычислительном центре Сибирского Отделения Академии наук СССР.

Научный руководитель:
академик Н.Н. Яненко

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Б.Д. Аннин.

доктор физико-математических наук
Н.Х. Ибрагимов.

Ведущая организация:

Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта

Автореферат разослан "___" ____________ 1974г. № 15352/сз-88
Защита диссертации состоится "___" ____________ 1974г. в ____ часов на заседании Совета Секции по прочности материалов и технологии машиностроения Объединенного учёного совета по физико-математическим и техническим наукам СО АН СССР в конференц-зале Института горного дела СО АН СССР (Новосибирск-91, Красный проспект, 54). С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института горного дела СО АН СССР.

Ученый секретарь Совета
доктор технических наук, профессор
Г.И.Грицко

Диссертация посвящена изучению свойств системы одномерных уравнений, описывающих динамические процессы в сплошной среде, и решению некоторых задач о распространении волн нагрузки в стержнях конечной длины.

Для решения задач динамики неупругой сплошной среды создан целый ряд моделей. При их построении надо формулировать уравнение состояния, которое связывает различные физические параметры, характеризующие процессы в ней. Формулируя уравнение состояния, авторы опираются на ту или иную физическую гипотезу, которая зачастую не определяет полностью уравнения состояния, оставляя некоторый произвол в виде неопределенных функций, входящих в него. Среди них назовем уравнения состояния Рахматулина-Кармана-Тейлора, Соколовского-Мальверна, А.Ю. Ишлинского, Надаи, А.А. Ильюшина, Ю.Н. Работнова, Белла, Симмонса-Хаузера-Дорна, Люблинера, Кристеску, С.К.Годунова и др. Все они содержат неопределенные функции, окончательных методов нахождения которых в настоящее время нет.

Возникает задача об ограничении классов неопределенных функций, входящих в уравнение состояния. Некоторые ограничения следуют из физических законов типа условий выпуклости уравнения состояния, его инвариантности относительно некоторых преобразований переменных. Кроме этого они могут появиться, если дополнительно требовать, чтобы система уравнений, описывающая модель, обладала определенными математическими свойствами. Одним из таких свойств системы уравнений может быть $\mathcal{D}$ -свойство, рассмотренное в предлагаемой работе.

Систему уравнений движения и неразрывности одномерной сплошной среды

$$v_t = \frac{1}{\rho}\sigma_x, \qquad \varepsilon_t = v_x \tag{I}$$

(σ - напряжение, v - скорость, ε -деформация, ρ -плотность, t - время, x - лагранжева координата) можно замкнуть уравнением первого порядка

$$\widetilde{Q}(\sigma, v, \varepsilon)\sigma_t + \widetilde{\mathcal{A}}(\sigma, v, \varepsilon)\varepsilon_t + \widetilde{\mathcal{B}}(\sigma, v, \varepsilon)\varepsilon_x + \widetilde{\mathcal{H}}(\sigma, v, \varepsilon)\sigma_x + \widetilde{C}(\sigma, v, \varepsilon) = 0. \quad (2)$$

Предварительно на уравнение состояния наложим ограничения:

I) инвариантность относительно преобразования Галилея (в эйлеровых координатах);

2) гиперболичность системы (I), (2), т.е. наличие у нее трех вещественных характеристик;

3) равенство модулей тангенсов углов наклона двух характеристик разных семейств в точке пересечения (в лагранжевых координатах) и совпадение третьего семейства характеристик с траекториями частиц среды;

4) $Q \neq 0$.

Вследствие этих ограничений уравнение состояния должно иметь вид

$$\sigma_t = a(\sigma, \varepsilon)\varepsilon_t + c(\sigma, \varepsilon). \quad (3)$$

Определение $\mathcal{D}$ - свойства основывается на методе дифференциальных связей, предложенном Н.Н. Яненко [I]. Метод дифференциальных связей является методом поиска частных решений систем дифференциальных уравнений. Его суть заключается в следующем. К заданной системе дифференциальных уравнений

$$\mathcal{S}: \quad \Phi_\nu\left(x_q, u_\gamma, \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_q}, \ldots, \frac{\partial^k u_\gamma}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_n^{q_n}}\right) = 0,$$

$$(\nu, \gamma = 1, 2, \ , r, \quad q = 1, 2, . \ , n; \quad q_1 + q_2 + \quad + q_n = k)$$

присоединяется система дополнительных дифференциальных соотношений (связей)

$$\mathcal{D}: \ \Psi_{\lambda_\alpha}\left(x_q, u_\gamma, \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_q}, \ldots, \frac{\partial^{j_\alpha} u_\gamma}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_n^{q_n}}\right) = 0,$$

$(\alpha = 1,2,\dots,m, \quad \lambda_\alpha = 1,2,\dots,i_\alpha, \quad q = 1,2,\dots,n,$

$\gamma = 1,2,\dots,r; \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = j_\alpha),$

которая состоит из совокупности $\sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha$ дифференциальных уравнений порядка j_α. Переопределенная система $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ в общем случае не будет в инволюции, и ее необходимо исследовать на совместность. Если $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ в инволюции, то можно искать ее решения, которые будут частными решениями системы $\mathcal{S}$. Как правило, решения системы $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ отыскиваются проще, чем решения системы $\mathcal{S}$, поскольку в первом случае произвол общего решения уже, чем во втором.

<u>Определение I.</u> Система дифференциальных уравнений $\mathcal{S}$ обладает $\mathcal{D}$ -свойством, если система $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, полученная объединением системы $\mathcal{S}$ и системы дифференциальных связей $\mathcal{D}$, совместна и находится в инволюции.

Вид дифференциальных связей Ψ_{λ_α} и уравнений Φ_μ подсистемы $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ можно не задавать априори, а находить апостериори, решая для системы $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ обратную задачу теории совместности. Обратную задачу можно сформулировать следующим образом:

Какого вида должны быть дифференциальные связи Ψ_{λ_α} и уравнения Φ_μ подсистемы $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, чтобы переопределенная система $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ имела заданный произвол в своем решении.

Обозначим символом $\mathcal{D}^{i_1, i_2, \dots, i_m}_{j_1, j_2, \dots, j_m} \Pi^{k_1, \dots, k_p}_{\ell_1, \dots, \ell_p}$ совокупность условий того, что система $\mathcal{S}$ обладает $\mathcal{D}$-свойством и что произвол решения системы $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ зависит от k_β функций от ℓ_β аргументов $(\beta = 1,2,\dots,p)$. Будем называть их $\mathcal{D}\Pi$ - условиями. В общем случае они являются системой дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций Ψ_{λ_α} и Φ_μ, решение которой является решением обратной задачи теории совместности.

<u>Определение 2.</u> Система $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, удовлетворяющая

$\mathcal{D}^{i_1, i_2, \dots, i_m}_{j_1, j_2, \dots, j_m} \Pi^{k_1, \dots, k_p}_{\ell_1, \dots, \ell_p}$ - условиям, называется

$\mathcal{D}^{i_1, i_2, \dots, i_m}_{j_1, j_2, \dots, j_m} \Pi^{k_1, \dots, k_p}_{\ell_1, \dots, \ell_p}$ - системой или просто

$\mathcal{D}\Pi$ - системой.

Определение 3. Решения системы уравнений $\mathcal{S}$, являющиеся также решениями $\mathcal{D}\mathcal{P}$ - системы, называются $\mathcal{D}\mathcal{P}$ -решениями.

Следует отметить, что система уравнений газовой динамики имеет $\mathcal{D}\mathcal{P}$ - решения [2].

Введенное понятие $\mathcal{D}$ -свойства применяется к системе (I), (3). К ней присоединяется квазилинейная дифференциальная связь первого порядка

$$\tilde{\mathcal{A}}(\sigma,\varepsilon)\sigma_x+\tilde{\mathcal{E}}(\sigma,\varepsilon)\varepsilon_t+\tilde{\mathcal{F}}(\sigma,\varepsilon)\varepsilon_x+\tilde{\mathcal{G}}(\sigma,\varepsilon)=0 \tag{4}$$

и выписываются $\mathcal{D}_1^1\mathcal{P}_1^2$ - условия для системы (I), (3), (4). Анализ показывает, что при $\tilde{\mathcal{A}}\equiv 0$ $\mathcal{D}_1^1\mathcal{P}_1^2$ - условия противоречивы, и вместо (4) удобнее рассматривать дифференциальную связь

$$\sigma_x=\mathcal{E}(\sigma,\varepsilon)\varepsilon_t+\mathcal{F}(\sigma,\varepsilon)\varepsilon_x+\mathcal{G}(\sigma,\varepsilon). \tag{5}$$

Устанавливается, что имеют место два случая $\mathcal{D}_1^1\mathcal{P}_1^2$-условий:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\equiv 0, \quad a=\frac{\mathcal{E}^2}{\rho},\\
&\mathcal{E}_\varepsilon=0,\\
&\rho c\mathcal{G}_\sigma-\rho\mathcal{G}c_\sigma+\mathcal{E}\mathcal{G}\mathcal{G}_\sigma=0,\\
&\mathcal{E}\mathcal{G}_\varepsilon-\rho c_\varepsilon=0,\\
&c\rho\mathcal{E}_\sigma-\mathcal{E}\mathcal{G}\mathcal{E}_\sigma-\rho\mathcal{E}c_\sigma+2\mathcal{E}^2\mathcal{G}_\sigma+\rho\mathcal{G}_\varepsilon=0
\end{aligned} \tag{6а}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}\equiv 0, \quad a=\mathcal{F},\\
&c\mathcal{G}_\sigma-\mathcal{G}c_\sigma=0,\\
&c\mathcal{F}_\sigma-\mathcal{F}c_\sigma-c_\varepsilon=0,\\
&\mathcal{F}\mathcal{G}_\sigma-\mathcal{G}\mathcal{F}_\sigma+\mathcal{G}_\varepsilon=0.
\end{aligned} \tag{6б}$$

В диссертации системы (6а) и (6б) проинтегрированы, и в результате получена

Т е о р е м а. Для того, чтобы система уравнений (I), (3) имела $\mathcal{D}_1^1\mathcal{П}_1^2$ - решения, характеризуемые дифференциальной связью (5), необходимо и достаточно выполнения либо соотношений (6а), либо соотношений (6б), при этом произвол в определении коэффициентов уравнения состояния в случае а) равен четырем константам или одной произвольной функции одного аргумента и в случае б) - одной произвольной функции одного аргумента и одной произвольной функции двух аргументов.

Далее к переопределенной системе (I), (3), (5) присоединяется вторая квазилинейная дифференциальная связь первого порядка и для пополненной системы выписываются $\mathcal{D}_1^2\mathcal{П}_1^1$ - условия. Оказывается, что они сводятся к системе Коши-Ковалевской первого порядка относительно четырех неизвестных функций и произвол в определении коэффициентов уравнения состояния равен четырем функциям одного аргумента.

Проделана классификация всех возможных случаев $\mathcal{DП}$ -решений системы (I), (3) с функциональным произволом, характеризуемых квазилинейными дифференциальными связями первого порядка. Ее результаты приводятся в следующей таблице:

Решения	$\mathcal{D}_1^1\mathcal{П}_1^2$	$\mathcal{D}_1^1\mathcal{П}_1^1$	$\mathcal{D}_1^2\mathcal{П}_1^{\kappa_1}$ $\kappa_1>1$	$\mathcal{D}_1^2\mathcal{П}_1^1$	$\mathcal{D}_1^3\mathcal{П}_1^{\kappa_2}$ $\kappa_2>0$
Условия	Система (6)	не существует	несовместны	система типа Коши-Ковалевской	несовместны

В связи с наличием у системы (I), (3) различных $\mathcal{DП}$ - решений возникает задача о их непрерывном примыкании друг к другу. Пусть дано $\mathcal{D}_{j_1}^{i_1}\mathcal{П}_{\ell_1}^{\kappa_1}$ - решение в области $\mathcal{B}_1$, к которой через линию γ примыкает область $\mathcal{B}_2$. Спрашивается, при каких условиях и сколько различных $\mathcal{D}_{j_2}^{i_2}\mathcal{П}_{\ell_2}^{\kappa_2}$ - решений в области $\mathcal{B}_2$ могут непрерывно примыкать через γ к заданному $\mathcal{D}_{j_1}^{i_1}\mathcal{П}_{\ell_1}^{\kappa_1}$ - решению (i_2, j_2, κ_2, ℓ_2 - фиксированы).

Вопрос о непрерывном примыкании различных $\mathcal{DП}$ - решений тесно связан с характеристиками системы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{DП}$ - систем. Установлено, что система (I), (3) имеет три семейства характеристик:

$$\gamma_1 \quad x'=0, \qquad \gamma_2 \quad x'=\sqrt{\frac{a}{\rho}}, \qquad \gamma_3: \quad x'=-\sqrt{\frac{a}{\rho}},$$

а $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$ - система и $\mathcal{D}_1^2\Pi_1^1$ - система имеют соответственно два и одно семейство характеристик. Существуют три вида $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$-решений: $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2(\gamma_1,\gamma_2)$ - решения, связанные с характеристиками γ_1 и γ_2, $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2(\gamma_1,\gamma_3)$ - решения, связанные с характеристиками γ_1 и γ_3 и $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2(\gamma_2,\gamma_3)$ - решения, связанные с характеристиками γ_2 и γ_3. Имеются также два вида $\mathcal{D}_1^2\Pi_1^1$ -решений, связанных соответственно с характеристиками γ_2 и γ_3. Доказана

Т е о р е м а. Если система (I), (3), (5) является $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$- - системой, то для любого решения системы (I),(3) существует единственное $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$ - решение, которое непрерывно может примыкать к нему через заданную характеристику: $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2(\gamma_1,\gamma_3)$ - решение - через характеристику γ_2, $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2(\gamma_1,\gamma_2)$ - решение через характеристику γ_3 и $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2(\gamma_2,\gamma_3)$ - решение - через характеристику γ_1.

Аналогично имеет место теорема о существовании и единственности $\mathcal{D}_1^2\Pi_1^1$ - решения, непрерывно примыкающего через заданную характеристику к заданному $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$ - решению.

Эти теоремы, как и всё рассмотрение $\mathcal{D}$ - свойств, имеют локальный характер.

В линейном случае для того, чтобы система (I), (3) имела $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$- решение, уравнение состояния (3) должно иметь вид

$$\sigma_t = a\varepsilon_t + c_1\sigma - ac_1\varepsilon + c_2, \tag{7}$$

где a, c_1, c_2 - константы. В диссертации приведены общее решение системы (I), (7), а также общие решения некоторых нелинейных $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$ - систем. Эти решения используются при изучении задачи о динамическом деформировании стержня длины ℓ, с предварительной деформацией ε_{cm}, один конец которого закреплен, а другой конец в момент $t=0$ начинает перемещаться вдоль оси стержня со скоростью u_0, остающейся постоянной при $t>0$. В рамках этой физической задачи решены следующие математические задачи для $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$ - систем.

<u>Задача I.</u> Найти функции $\varepsilon(t,x)$ и $v(t,x)\in C^2(\Omega)$ и удовлетворяющие уравнениям $\mathcal{D}_1^1\Pi_1^2$ - системы, начальным $\varepsilon(0,x)=\varepsilon_{cm}$, $v(0,x)=0$ и граничным $v(t,0)=0$, $v(\ell,t)=u_0>u_1$ условиям. Здесь Ω - область $(0<t<T_1,\ 0<x<\ell)$, u_1 -скорость, при которой материал стержня приобретает пластические деформации.

<u>Задача 2.</u> Найти функцию $C=C(\sigma-\varphi(\varepsilon))$, удовлетворяющую уравнению (3) и заданному условию $\sigma(t,0)=\Phi(t)$ на решении задачи I, полагая, что $\sigma=\varphi(\varepsilon)$ является статической зависимостью $(\sigma\leftrightarrow\varepsilon)$ и $C(0)=0$.

Конкретные расчеты по обеим задачам проведены, когда уравнение состояния (3) содержит пять произвольных констант, три из которых определяются из статических экспериментов, а два из динамического эксперимента, в котором определяется $\sigma(t,0)=\Phi(t)$. Для этого были использованы данные, приведенные в [3]. Проделаны два расчета, соответствующие двум динамическим экспериментам с разными предварительными нагрузками $\sigma_{cm}=\varphi(\varepsilon_{cm})$, но с одной и той же скоростью нагружения. Оказалось, что константы, определяемые из динамического эксперимента, мало отличаются для этих двух случаев. При этом достигнуто хорошее совпадение расчетов и эксперимента.

Была решена также задача построения динамической зависимости $(\sigma\leftrightarrow\varepsilon)$ по экспериментальным данным, приведенным в работе [4]. Наблюдается существенная зависимость динамической диаграммы $(\sigma\leftrightarrow\varepsilon)$ от скорости нагружения. Результаты расчетов представлены в виде графиков.

В качестве алгоритма совместности исследования переопределенных систем в диссертации используется метод внешних форм Картана. Исследование на совместность является трудоемким процессом, возникает задача использования для этих целей ЭВМ [5]. В диссертации дается описание в виде технического задания для программирования алгоритма Картана исследования на совместность систем Пфаффа. В ней приведены вся совокупность действий, формулы и блок-схема алгоритма, в которой предусмотрено также решение обратной задачи теории совместности. Это описание позволило Е.А. Арайсу создать программу в системе "Авто-Аналитик" [6, II], реализующую на ЭВМ алгоритм Картана. В диссертации приведены примеры систем Пфаффа, исследованные на совместность на ЭВМ БЭСМ-6.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [7--II] и докладывались на V Всесоюзном совещании по аналитическим методам в газовой динамике (Москва, I972), на Всесоюзном симпозиуме по дифференциальным и интегральным уравнениям (Душанбе, I972), на Всесоюзном семинаре по моделям механики сплошной среды (Новосибирск, I973), на Всесоюзном симпозиуме по нелинейным и тепловым эффектам в переходных волновых процессах деформации твердого тела (Таллин, I973), на семинарах Вычислительного центра и Института гидродинамики СО АН СССР.

Автор выражает благодарность академику Н.Н. Яненко за руководство работой.

Л и т е р а т у р а

I. ЯНЕНКО Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных.–Труды IУ Всесоюзного математического съезда, Ленинград, I964.

2. РАСПОПОВ В.Е., ШАПЕЕВ В.П., ЯНЕНКО Н.Н. Применение метода дифференциальных связей к одномерным уравнениям газовой динамики. Численные методы механики сплошной среды. Т.2, № 5, I97I.

3. КОКОШВИЛИ С.М., КАЛНИНЬ П.П. Исследование распространения продольных волн в полиэтиленовом стержне. "Механика полимеров", № I, I970.

4. ФОМИН В.М., ХАЙРУЛЛИН Н.Х., СТЕПАНЦОВ Г.К. К задаче о распространении волн в физически нелинейных стержнях конечной длины. Сб. Исследования по теории пластин и оболочек, в.9, КГУ, I972.

5. ШУРЫГИН В.А., ЯНЕНКО Н.Н. О реализации на электронных вычислительных машинах алгебраическо-дифференциальных алгоритмов."Проблемы кибернетики", в.6, I96I.
6. АРАЙС Е.А., СИБИРЯКОВ Г.В. Некоторые операторы "Авто-Аналитика". Сб. статей "Вопросы программирования и автоматизации проектирования", изд-во ТГУ, В.I, I97I.

ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

7. ШАПЕЕВ В.П. Логическая схема алгоритма Картана. Сб. Комплексы программ математической физики, Новосибирск, I972.
8. ФОМИН В.М., ШАПЕЕВ В.П., ЯНЕНКО Н.Н. Применение метода дифференциальных связей к построению замкнутых математических моделей, описывающих динамические процессы в стержнях, У Всесоюзное совещание по аналитическим методам газовой динамики. Тезисы докладов, М., I972.
9. ФОМИН В.М., ШАПЕЕВ В.П., ЯНЕНКО Н.Н. Применение метода дифференциальных связей к построению замкнутых математических моделей, описывающих одномерные динамические процессы в сплошной среде, Численные методы механики сплошной среды, Т.4, № 3, I973.
I0. ФОМИН В.М., ШАПЕЕВ В.П., ЯНЕНКО Н.Н. $\mathscr{D}$ - свойства систем одномерных уравнений динамики неупругой сплошной среды,-ДАН СССР, (в печати).
II. АРАЙС Е.А., ШАПЕЕВ В.П., ЯНЕНКО Н.Н. Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ,-ДАН СССР, т. 2I4, № 4, I974.

Подписано в печать I5.III.I974 МН МН 09I36
Бумага 60 х 84, I/I6. Объем 0,75 п.л.
Тираж 220 экз. Заказ № 485.

Ротапринт ВЦ, 630090, Новосибирск