МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР

УЧЕНЫЙ СОВЕТ ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ ПРИ НОВОСИБИРСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

На правах рукописи

ПААСОНЕН ВИКТОР ИВАНОВИЧ

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ И СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

(01.01.07 - вычислительная математика)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Новосибирск 1974

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР

УЧЕНЫЙ СОВЕТ ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ ПРИ НОВОСИБИРСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

На правах рукописи

ПААСОНЕН ВИКТОР ИВАНОВИЧ

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ И СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

(01.01.07 - вычислительная математика)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Новосибирск 1974

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики сплошной среды Новосибирского государственного университета.

Научный руководитель:
академик Н.Н.ЯНЕНКО

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
В.И. ПОЛЕЖАЕВ,
кандидат физико-математических наук
С.М. ШУГРИН

Ведущая организация:
Институт прикладной математики
Академии Наук СССР

Автореферат разослан "15" мая 1974г. №
Защита диссертации состоится "18" июня 1974 г.
в 15 час. на заседании Ученого Совета по присуждению ученых степеней по математике и механики при Новосибирском государственном университете по адресу:
Новосибирск - 630090, Пирогова 2, аудитория 402.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НГУ.

Ученый секретарь Совета
доктор физико-математических наук

ЮМерзляков

Ю.И. МЕРЗЛЯКОВ

Важной задачей метода конечных разностей является создание эффективных разностных схем (р.с.). Для ее решения в методологии р.с. существует целый ряд направлений: метод дробных шагов, оптимизация итерационных процессов, консервативные методы сквозного счета и другие общие и специальные средства. В частности, к этой цели ведет повышение порядка точности р.с. Порядком точности определяется степень детальности разностной сетки, достаточная для решения задачи с заданной точностью. Использование высокоточных р.с. позволяет существенно ослабить требования, предъявляемые к памяти ЭВМ, и значительно сократить объем вычислений.

Р.с. повышенного порядка точности посвящена обширная литература. С основными подходами к построению и исследованию р.с. повышенной точности для параболических и эллиптических уравнений и итерационных процессов, обзорами результатов и библиографией по этой теме можно познакомиться по монографиям [I – 4] . Для уравнений гиперболического типа известны различные по способу построения и структуре р.с. повышенного порядка точности. Отметим р.с., основанные на многоточечной аппроксимации [II] . Широкое распространение в практике вычислений получили р.с. для квазилинейных систем [5], основанные на идеях метода Рунге-Кутта. В последнее время получены результаты, относящиеся к несимметричным р.с. повышенной точности [I2] и уточнениям метода Лакса и Вендроффа [I3] .

Диссертация посвящена алгебраическим методам построения высокоточных р.с. для гиперболических систем, систем с диссипативными членами и их стационарных аналогов, для уравнений второго порядка различных типов в ортогональных системах координат и вопросам, связанным с применением р.с. повышенной точности для решения некоторых задач механики сплошной среды: расчета стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости и непотенциальных канаповых течений идеальной несжимаемой жидкости, расчета разрывных решений газовой динамики, решения задач акустики и нелинейной теплопроводности.

Первая глава посвящена исследованию р.с. произвольного порядка точности относительно шага пространственной сетки для систем гиперболического типа, а также для параболических и эллиптических систем с конвективными и диссипативными членами.

В § I для разностного оператора(р.о.) $\frac{1}{h}\Delta_{p,q} = \frac{1}{h}\sum_{k=-q}^{p}\alpha_k T_h^k$, определенного на (p, q) – шаблоне, определены понятия меры несимметрии ($z = q - p$) и R – свойства – полуопределенности проекции спектра $\delta(\xi)$ р.о. Δ на вещественную ось. Для класса р.о., аппроксимирующих производную $\frac{\partial}{\partial x}$ с порядком $s = p + q$, максимальным для заданного шаблона, установлено точное ограничение ($|z| \le 2$), при котором R – свойство имеет место, причем знаки $Re\,\delta(\xi)$ и z совпадают.

В § 2 исследуются р.с. с весами для одномерной гиперболической системы. Доказано, что если используемые р.о. обладают R – свойством и знаки $Re\,\delta_i(\xi)$ согласованы со знаками коэффициентов a_i при производных в соответствующих инвариантах, то при обычном ограничении на вес верхнего слоя ($\alpha \ge 0.5$) достаточный признак корректности [6] выполняется без каких бы то ни было ограничений на соотношение шагов. Показано также, что R – свойство необходимо для устойчивости р.с. с произвольными весами. Для р.с., использующих максимально точные р.о., с помощью результатов § I спектральное R – свойство в условиях устойчивости адекватно заменено простыми ограничениями на несимметрию р.о.:

$$a_i z_i \ge 0, \quad |z_i| \le 2 \quad \forall i \quad (z_i = q_i - p_i).$$

Аналогичные результаты получены в § 3 для р.с. расщепления с весами, аппроксимирующих многомерную гиперболическую систему симметричную по Фридрихсу и аналогичных по структуре мажорантным р.с. расщепления [I] .

В § 4 метод распространяется на системы с диссипативными членами и обсуждаются некоторые уточнения, необходимые для применения метода в нелинейном случае; отмечено преимущество дивергентного способа аппроксимации.

Модификация метода для стационарных уравнений дана в

§ 5. Ее суть заключается в использовании на верхнем слое р.о. рассмотренного выше типа, но содержащих меньшее число точек, чем на нижнем слое. Это позволяет, в частности, находить с повышенной точностью установившиеся решения, используя лишь обычные трехточечные прогонки. Сформулированы условия на спектры р.о., обеспечивающие устойчивость.

Примеры симметричных и несимметричных р.с. повышенной точности для стационарных уравнений даны в § 6. Конкретизированы ограничения на веса р.с., при которых спектральные условия устойчивости § 5 выполняются.

Глава вторая посвящена применению р.с. повышенной точности для расчета стационарных течений несжимаемой жидкости.

В § I решается система уравнений Навье-Стокса в терминах компонент скорости и давления. В модели слабосжимаемой жидкости [I] и с введением искусственной вязкости в уравнение неразрывности задача сводится к эволюционной параболической, для которой используются р.с., изученные в §§ 5, 6 главы I. Граничные условия для давления аппроксимируются с помощью высокоточных односторонних разностных аналогов первых и вторых производных. Приводятся результаты расчета вихревого течения по р.с. I, 2, 3, 4 порядков аппроксимации.

В § 2 уравнения Навье-Стокса решаются в терминах функции тока и вихря скорости. На границе вихрь пересчитывается с любым порядком по многоточечной односторонней формуле подобной условию Тома. Используются р.с. с неодинаковым числом точек на верхнем и нижнем слоях, аналогичные рассмотренным в §§ 5, 6 главы I, но не в форме покоординатного расщепления, а в форме факторизации.. Локальный анализ устойчивости, проведенный с привлечением ЭВМ для широкого диапазона чисел Рейнольдса и параметров Куранта, свидетельствует о безусловной устойчивости р.с. при ограничении на разностное число Рейнольдса $Re^* = Re \times h \leq const$. Для вихревого течения в ступенчатой области проведено сравнение различных р.с.

§ 3 посвящен расчету непотенциальных каналовых течений идеальной несжимаемой жидкости в обычной постановке, когда мера непотенциальности задана, и в более сложной постановке, когда она является дополнительной искомой функцией [7].

Для симметричной р.с. четвертого порядка аппроксимации проведено сравнение численного анализа устойчивости с результатом гармонического анализа. Ограничения на шаг различаются лишь при большом весе неявности р.с., что вызвано явным пересчетом искомой правой части. Аналогичный факт отмечался ранее для р.с. второго порядка аппроксимации типа стабилизирующей поправки [7] . На тестовой задаче проведено сравнение результатов, полученных по различным р.с.

В третьей главе дан метод построения неявных р.с., обладающих псевдовязкостью максимального для данного шаблона порядка, для линейных и квазилинейных гиперболических систем уравнений.

В § I проведено построение для линейной системы. В класс р.с., максимально точных на заданном шаблоне, искусственно вводится свободный параметр, позволяющий сконструировать класс р.с., обладающих параболичным первым дифференциальным приближением (п.д.п.) и имеющих порядок точности, на единицу меньший максимально возможного. Исследована структура вязкости и характеристические свойства р.с. этого класса.

В § 2 для класса высокоточных р.с. с искусственной вязкостью доказана эквивалентность диссипативности (см. [6]) и параболичности п.д.п. Этот результат представляет собой распространение для класса неявных р.с. на произвольном шаблоне утверждения, высказанного в работе [8] относительно явных двух-и-трехточечных р.с.

Геометрическая интерпретация искусственной вязкости, вскрывающая ее аппроксимационный характер, дана в § 3. Показано, что наличие вязкости можно рассматривать как следствие несимметричной по времени либо по пространству аппроксимации. Такой подход оказался удобным для построения аналогичных р.с. в случае квазилинейных систем. Проведено построение р.с. третьего порядка точности с несимметричной аппроксимацией производных, согласованной с направлением характеристик квазилинейной системы. Ее исследование проведено эвристически с помощью метода п.д.п., более простого, чем гармонический анализ, и, согласно результатам § 2, в данном случае равноправного с последним.

Вопросы реализации р.с. третьего порядка аппроксимации для квазилинейной системы и некоторые результаты численного решения уравнений газовой динамики в форме Эйлера обсуждаются в § 4.

В четвертой главе построены р.с. повышенного порядка аппроксимации для нелинейных параболических, эллиптических и гиперболических уравнений, не содержащих смешанных производных. Формализм построения основан на использовании элементарных р.с. дивергентной структуры, имеющих специальное разложение по степеням пространственного шага [9].

В § I построена р.с. повышенного порядка аппроксимации, формально обобщающая известную р.с. [9] на случай несамосопряженного параболического уравнения, коэффициенты которого могут зависеть от решения. Проведено сравнение с известными методами на одно-и-двумерных нелинейных задачах теплопроводности.

Из р.с., рассмотренной в § I, в частном случае независимости решения от времени получается р.с. четвертого порядка аппроксимации для эллиптического уравнения общего вида без смешанных производных. Эта р.с. применена в § 2 для решения ряда краевых задач для уравнения Пуассона в полярных координатах. Граничные условия аппроксимируются с помощью многоточечных односторонних аналогов нормальных производных. Подобный способ использовался также при расчете течений жидкости во второй главе. Исследование многоточечных граничных условий проведено методом энергетических оценок [2] для модельной краевой задачи Ш рода. Доказана корректность р.с. с произвольной аппроксимацией граничных условий.

Эллиптическое уравнение без смешанных производных легко перевести в гиперболическое уравнение второго порядка с помощью преобразования одной из координат $x = it$, где i – мнимая единица. В § 3 подобный подход применен к р.с. для эллиптического уравнения, рассмотренной в § 2. В результате получена р.с. четвертого порядка аппроксимации относительно шагов пространственной и временной сетки для гиперболического уравнения довольно общего вида, которое может быть и нелинейным. Методом факторизации построены экономичные р.с., различающиеся порядком точности и диссипативными свойствами. Исследование р.с. проведено в случае постоянных коэффициентов на основе общей теории устойчивости трехслойных р.с. [10] . Р.с. испытаны на задачах акустики в различных координатных системах.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [14 - 18] и докладывались на семинарах отделения механики сплошной среды ВЦ СО АН СССР и кафедры "Вычислительные методы механики сплошной среды" НГУ, руководимых академиком Н.Н. Яненко, на советско-французском симпозиуме "Численные методы решения больших систем функциональных уравнений математической физики на высокопроизводительных ЭВМ" (Новосибирск, май 1972 г.), на IУ Всесоюзном семинаре по численным методам механики вязкой жидкости (Рига, сентябрь 1972 г.).

Автор выражает глубокую признательность Н.Н. Яненко за научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск. "Наука", 1967.
2. А.А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. Москва. "Наука", 1971.
3. Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. Новосибирск. "Наука", 1973.
4. А.Н. Валиуллин. Схемы повышенной точности для задач математической физики. Новосибирск. Изд. НГУ, 1973.
5. В.В. Русанов. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений. ДАН СССР, 180, (1968).
6. Р.Д. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач. Москва. "Мир", 1972.
7. Б.Г. Гуров, Н.Н. Яненко, И.К. Яушев. Численный расчет непотенциальных течений идеальной жидкости в плоских каналах. Числ. мет. мех. спл. среды (ЧММСС), 2 (1971) № 1.
8. Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокин. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем. ДАН СССР, 182 (1968).
9. А.А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. ЖВМиМФ, 3 (1963) № 5.
10. А.А. Самарский, А.В. Гулин. Устойчивость разностных схем. Москва. "Наука", 1973.
11. Strang. Trigonometric polynomials and difference methods of maximum accuracy. J.of Math. and Phusies. 41 (1962) № 2.
12. Warming. Second and third-order noncentered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations. AIAA.J. 11 (1973) № 2.

13. Zwas, Abarbanel. Third fourth order accurate schemes for hyperbolic eqations conservation law form. Math. Comput. 25 (1971) № 114.
I4. А.Н. Валиуллин, В.И. Паасонен. Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний. ЧММСС, I (I970) № I.
I5. А.Н. Валиуллин, В.И. Паасонен, Р.И. Сафин. О схеме расщепления с повышенным порядком аппроксимации краевых задач для уравнения Пуассона. ЧММСС, 3 (I972) № I.
I6. В.И. Паасонен. Абсолютно устойчивые разностные схемы повышенной точности для систем гиперболического типа. ЧММСС, 3 (I973) № 3.
I7. С.А. Ждан, В.И. Паасонен. Схема повышенной точности для задачи о непотенциальном течении идеальной жидкости в плоских каналах. ЧММСС, 3 (I972) № 5.
I8. В.И. Паасонен. Диссипативные неявные схемы с псевдовязкостью высших порядков для гиперболических систем уравнений. ЧММСС, 4 (I973) № 4.

Подписано в печать I2 .5.74. МН 0923I . Формат бумаги 60 x 84, I/I6.. Объем 0,6 п.л. Тираж 220 экз. Заказ № 420

Ротапринт НГУ. 630090, Новосибирск.