МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
Новосибирский государственный университет

Б.Г.ГУРОВ

СТАЦИОНАРНЫЕ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

(на русском языке)

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(01. 003- Дифференциальные уравнения)

Новосибирск 1971

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
Новосибирский государственный университет

Б.Г.ГУРОВ

СТАЦИОНАРНЫЕ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

(на русском языке)

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(OI. 003- Дифференциальные уравнения)

Новосибирск 1971

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель-академик Н.Н.ЯНЕНКО

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,

профессор В.Н. МОНАХОВ

кандидат технических наук С.М. ШУГРИН

Ведущее учреждение-Вычислительный центр СО АН СССР

Автореферат разослан "_____"________________1972 г.

Совет по присуждению ученых степеней по математике и механике при Новосибирском государственном университете направляет Вам для ознакомления автореферат диссертации Б.Г. Гурова на тему "Стационарные непотенциальные течения идеальной жидкости в плоских каналах конечной длины", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НГУ.

О времени защиты будет объявлено за 10 дней в газете "Советская Сибирь".

Ученый секретарь Совета,
кандидат физико-математических
наук, доцент — Ю.И. Мерзляков.

В работе исследуются непотенциальные течения в плоских каналах конечной длины рис. I. Завихренность течения не предполагается заданной заранее и для ее определения на входе канала $x = x_0$ задается дополнительное граничное значение, в сравнении с обычными краевыми задачами для уравнений эллиптического типа [I].

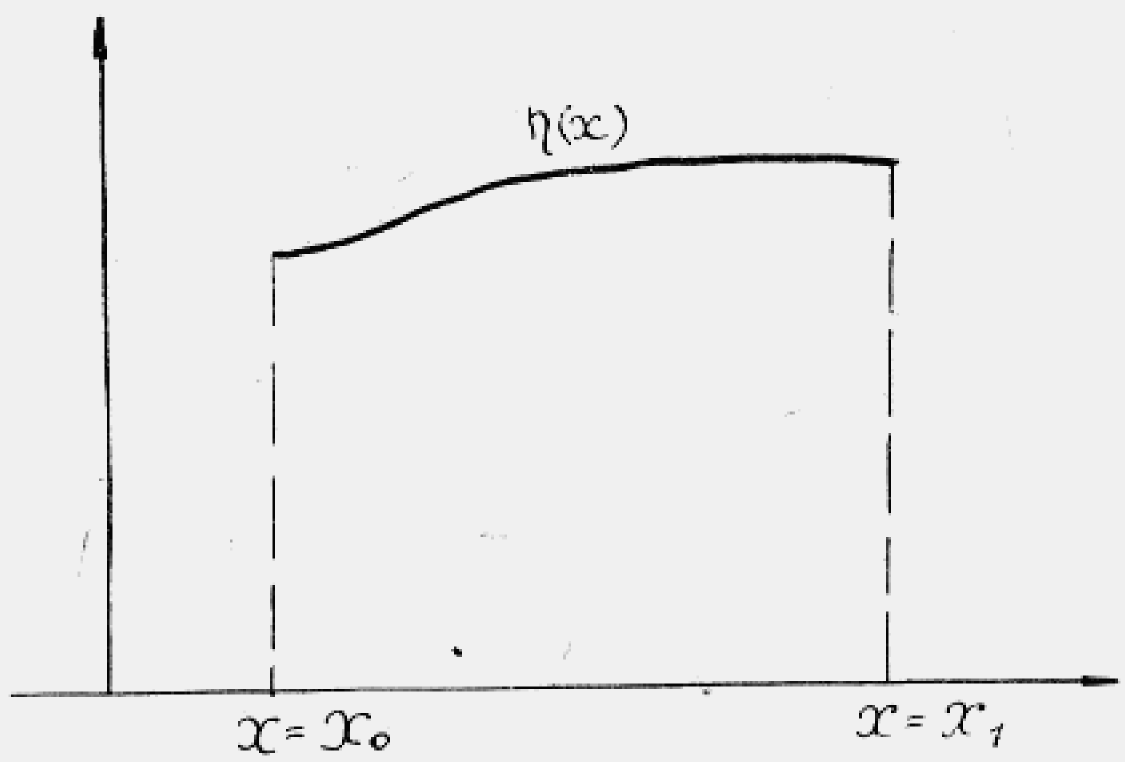

Рис. I.

Диссертация состоит из введения, трех глав (которые, в свою очередь, рубрикуются в случае необходимости параграфами и пунктами) и двух приложений.

В первой главе работы ставятся граничные задачи и доказываются теоремы существования и единственности. Рассмотрены задачи о течении несжимаемой жидкости в отсутствии массовых сил, несжимаемые потоки в поле неконсервативных сил, зависящих от компонент вектора скорости и течения несжимаемой жидкости с уравнением состояния $\rho = \rho(T)$.

Показано, что задача определения несжимаемых свободных потоков сводится к краевой задаче для $W = \frac{V_y}{V_x}$ (V_x, V_y – компоненты вектора скорости):

$$W_{xx} + W_{yy} - 2\frac{W}{1+W^2}(W_x^2 + W_y^2) - \frac{W_y - W W_x}{1+W^2}\,\frac{f(\Psi)}{V(\Psi)}\,\exp\left(-\int_{x_0}^{x} W_y\,dx\right) = 0 \qquad (1)$$

Интеграл берется вдоль линии тока $y'(x) = W$

$$W|_{\Gamma} = \overline{W} \qquad (2)$$

$$\overline{W}|_{x=x_0} = \overline{W}|_{x=x_1} \equiv 0$$

$$V|_{x=x_0} = \overline{V}(\overline{\Psi}) \qquad (3)$$

$$f(\Psi) = (1+W^2)\,\widetilde{W}_x(0,\Psi) \qquad (4)$$

Рассматриваются непотенциальные течения, удовлетворяющие условию $V_x = V > 0$, поэтому функцию $(f(\Psi))$ в (4) достаточно определить лишь на входе канала ($x = x_0$). Все члены в выражении (4), за исключением $\widetilde{W}_x(0,\Psi)$ определяются граничными условиями (2-3). Без нарушения общности в работе полагается $x_0=0$. Кроме того, во избежание трудностей, которые возникают при изучении эллиптических уравнений в негладких областях, предполагается, что примыкание $\eta(x)$ с прямой $x=x_I$ гладкое и область $\mathcal{D}$ рис. 2 допускает зеркальное отображение относительно $x = 0$ так, что область $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}^o$ ($\mathcal{D}^o$ – зеркальный образ $\mathcal{D}$) имеет гладкую границу $\Gamma \cup \Gamma^o / \Gamma^o \in C_{2,\alpha}$ (Γ^o – вход канала, Γ – граница $\mathcal{D}$). Эти предположения позволят нам пользоваться в $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}^o$ оценками Шаудера. При численных расчетах, указанные ограничения на область не используются.

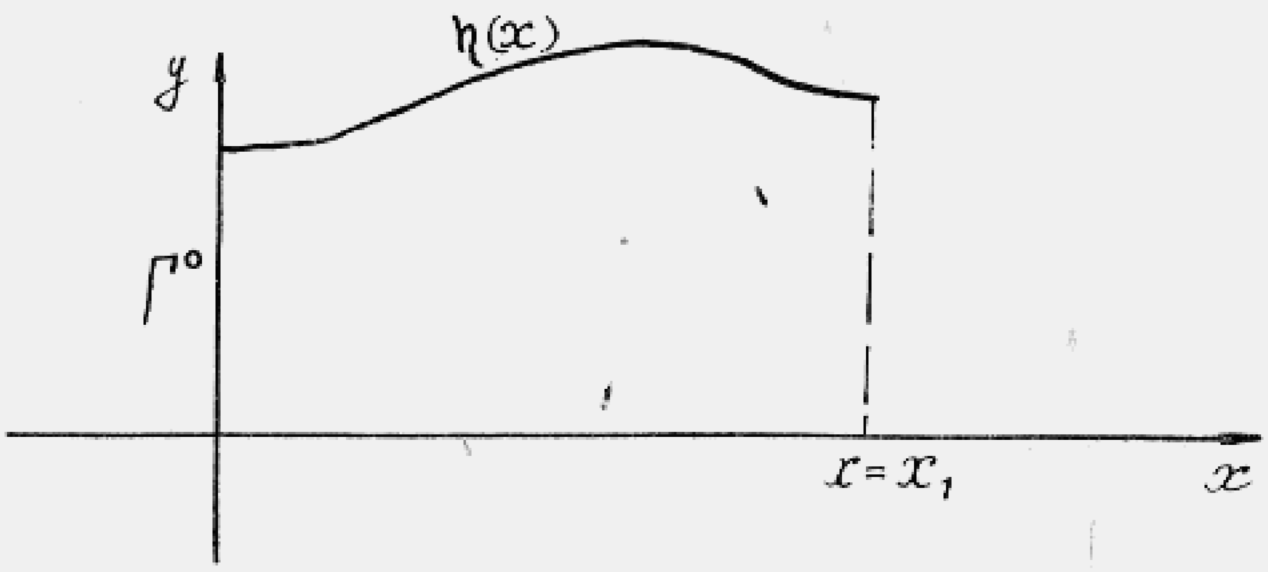

Рис. 2.

В главе I на основе теоремы Шаудера [2] показана разрешимость задачи (I – 4) в слабо искривленных каналах. Единственность решения следует из принципа сжатых отображений, справедливость которого показана для более общего течения несжимаемой жидкости в поле непотенциальных сил, линейно зависящих от компанент вектора скорости:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = A_{11} V_x + A_{12} V_y \qquad (5)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = A_{21} V_x + A_{22} V_y$$

Условие ρ = I, очевидно, несущественное ограничение. Система сводится к уравнению для W и соотношениям для компанент $grad\, V$ ($V = V_x$):

$$W_{xx} + W_{yy} - 2\frac{W}{1+W^2}(W_x^2 + W_y^2) = \frac{W_y - WW_x}{1+W^2}\,\frac{1}{V_x}\,[f(\Psi) + \int_0^x \frac{G}{V}\,dx'] - \frac{G}{V^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-V\frac{\partial W}{\partial y} - VW\frac{\partial W}{\partial x} - W[f(\Psi) + \int_0^x f(\Psi) + \int_0^x \frac{G}{V}\,dx']}{1+W^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-VW\frac{\partial W}{\partial y} + V\frac{\partial W}{\partial x} + f(\Psi) + \int_0^x \frac{G}{V}\,dx'}{1+W^2}$$

$$V = \bar{V}(\Psi)\exp(-\int_0^x W_y\,dx'),$$ G зависит от A_{ij} и W

A_{11}, A_{22} - четные функции относительно $x' = 0$,
A_{12}, A_{21} - нечетные.

Граничные условия для (6) в точности совпадают с (2-3).

Разрешимость задачи единственным образом показана для слабо искривленных каналов методом сжатых отображений, при условии малости функций A_{ij} $(i,j = 1,2)$ в $C_{1,\alpha}(\bar{\mathfrak{D}})$

Существование и единственность решения для задачи о канавловых течениях сжимаемого теплопроводного газа с уравнением состояния $\rho = \rho(T)$ доказывается на основании принципа сжатых отображений для слабо искривленных каналов и в предположении, что на боковых поверхностях канала температура поддерживается близкой к постоянной величине. Основные уравнения задачи имеют вид:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} = 0$$

$$\rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

$$\rho V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)-\rho c_p V_x \frac{\partial T}{\partial x}+\rho c_p V_y \frac{\partial T}{\partial y}=0 \tag{8}$$

$$\rho=\rho(T) \tag{9}$$

Система (7), как и в случае несжимаемой жидкости, сводится к уравнению для W и соотношениям для компанент $grad\, V$, $(V=V_x)$

$$W_{xx}+W_{yy}=2\frac{W}{1+W^2}(W_x^2+W_y^2)+2\frac{W_y-WW_x}{1+W^2}\frac{1}{V}\left[f(\Psi)+\int_0^x\frac{G_0}{V}dx\right]-\frac{G_1}{V^2}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{VW_y-WVW_x-W\left[f(\Psi)+\int_0^x\frac{G_0}{V}dx'\right]-G_1}{1+W^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y}=\frac{-VWW_y+VW_x-WG_1+f(\Psi)+\int_0^x\frac{G_0}{V}dx'}{1+W^2}$$

$\frac{1}{V}$, G_0, G_1 зависят от ρ, W

Отметим, что вид соотношений (10) не изменится, если рассматривать течения в поле силы тяжести.

Граничная задача ставилась следующим образом:

$$W|_{\Gamma}=\overline{W},\quad \overline{W}|_{x=0}=\overline{W}|_{x=x_1}\equiv 0,\quad V|_{\Gamma^0}=\overline{V}=const>0$$

$$T|_{\Gamma\cup\Gamma^0}=T^0+\varphi(x,y),\quad T^0=const>0,\quad T_x|_{\Gamma^0}\equiv 0$$

Для доказательства справедливости принципа сжатых отображений, существенно использовались оценки Шаудера [2].

В заключении первой главы рассмотрены вопросы существования и единственности в существенно двумерных каналах с малой завихренностью течения. Для доказательства теорем используется инвариантное преобразование решений квазилинейного уравнения:

$$W_{xx}+W_{yy}-2\frac{W}{1+W^2}(W_x^2+W_y^2)=0 \tag{11}$$

Преобразование имеет вид:

$$\widetilde{W}=tg(K_1+K_2\, arctg\, W)$$

$$K_1;\ K_2 - const.$$

Нетрудно убедиться, что преобразование (12) переводит произвольное решение уравнения (11) вновь в решение этого же уравнения. Полагая $K_1=0$ и выбирая малой постоянную K_2, мы преобразуем краевую задачу с произвольными (но конечными) в $C_{2,\alpha}(\Gamma)$ граничными условиями в задачу с малыми граничными условиями. Это позволяет ввести в задачи о непотенциальных течениях в существенно двумерных областях малый параметр и доказать теоремы существования и единственности применением принципа сжатых отображений.

Вторая глава диссертации посвящена численному решению задач о непотенциальных каналовых течениях.

Для численного определения несжимаемых потоков используется уравнение:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -f(\psi) \tag{I3}$$

где функция $f(\psi)$ характеризующая непотенциальность течения, определяется в процессе итерационного решения из условий на входе канала и значений решения на нижней итерации. Введением новых независимых переменных $x' = x,\ \psi$ и искомой функции $y(x,\psi)$ уравнение (I3) приводится к виду

$$\frac{1}{y_\psi} y_{xx} - 2\frac{y_x}{y_\psi^2} y_{x\psi} + \frac{1+y_x^2}{y_\psi^3} y_{\psi\psi} = f(\psi) \tag{I4}$$

Область $\mathcal{D}$ в новых переменных прямоугольная

$E : [0 \leq x \leq x_1,\ \ 0 \leq \psi \leq \psi_1]$

Решение ищется методом установления [3] В области E формулируется следующая краевая задача: требуется найти решение уравнения

$$y_t = \frac{1}{y_\psi} y_{xx} - 2\frac{y_x}{y_\psi^2} y_{x\psi} + \frac{1+y_x^2}{y_\psi^3} y_{\psi\psi} - f(\psi) \tag{I5}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned}
y &= 0, & 0 \leq x \leq x_1,\ \ \psi = 0 \\
y &= \eta(x), & 0 \leq x \leq x_1,\ \ \psi = \psi_1 \\
y &= \bar{y}(\psi), & x = 0,\ \ 0 \leq \psi \leq \psi_1 \\
y_x &= \bar{y}_x^0, & x = 0,\ \ 0 \leq \psi \leq \psi_1 \\
y_x &= \bar{y}_x^1, & x = x_1,\ \ 0 \leq \psi \leq \psi_1
\end{aligned} \tag{I6}$$

и некоторым произвольным начальным условиям. Предельная функция ($t \to \infty$) данной нестационарной задачи будет решением уравнения (I4), удовлетворяющим условиям (I6). Заметим, что (I6) эквивалентны условиям (2 - 3). Численно задача (I5 - I6) интегрируется с использованием конечно-разностных схем в дробных шагах. В работе использована схема стабилизирующей поправки (Дуглас-Рэкфорд [4]).

Установлена сходимость методом при выполнении условия

$$\tau \leq \frac{4h^2}{7a_0}, \qquad a_0 = \max_{\Gamma^0} \frac{1}{|y_\gamma|} \tag{I7}$$

τ - шаг времени, h - пространственный шаг.

Условие (I7) проверено численными экспериментами при различных функциях $\eta(x)$ характеризующих боковую поверхность и на различных пространственных сетках I0 x I0, 20 x 20, 20 x 40. Кроме того, в главе Ш диссертации проведено теоретическое исследование линеаризованной схемы для задачи (I5-I6) и показана достаточность для сходимости условия (I7).

Точность метода проверялась сравнением с точным решением уравнения (I5), которое имеет вид:

$$y = \frac{2^{1/2} \exp\left[T^{1/2}(x - C_1)\right]}{\left\{1 - \exp\left[2T^{1/2}(x - C_1)\right]\right\} C_0}$$

Установлено, что на сетках I0 x I0 и I5 x I5 узлов ошибка метода ниже 2%. Результаты расчетов оформлены в таблицах, которые приведены в диссертации. Условие на шаг по времени (I7) является очень обременительным и поэтому представляет интерес метода счета, позволяющий добиваться сходимости при менее жестких ограничениях на τ.

Во П главе излагается алгоритм расчета течений идеальной сжимаемой жидкости, основанный на стационировании задач с типа (6), (I0). В частности, $T = const$ задача (I0) переходит в задачу о течениях несжимаемой жидкости. Для численного решения в задаче (I0) совершается переход к новым независимым переменным $x, y \rightarrow x, \Psi$ Нестационарные члены $\frac{\partial}{\partial t}$ добавляются к уравнениям для W и T которые в процессе численного решения интегрируются по схеме Дугласа-Рэкфорда [4] Соотношения для V и компонент $grad V$ интегрируются методом трапеций. Указанный алгоритм обобщается на случай течения газов с более общим уравнением состояния $\rho = \rho(T)$

Построена программа для расчета данных течений. Для проверки метода в качестве теста использовано точное решение задачи с $\rho = \frac{P}{T}$ которое можно получить из точного решения для несжимаемой жидкости $\Psi = y\cos(x-c)$ в предположении, что $\rho = \rho(\Psi)$ и введением в уравнение для T правой части, дающей возможность удовлетворить уравнению теплопроводности. В таблицах, приведенных в работе, показано, что отклонение расчетных параметров от тестовых на сетке I5xI5 узлов составляет около 2%. Процесс сходится при $\tau \sim h$ Для достижения сходимости требуется не более 200 итераций.

Вторая глава диссертации завершается описанием алгоритма расчета течений с контактным разрывом. Предполагается, что разрыв имеет место вдоль линии тока рис. 3.

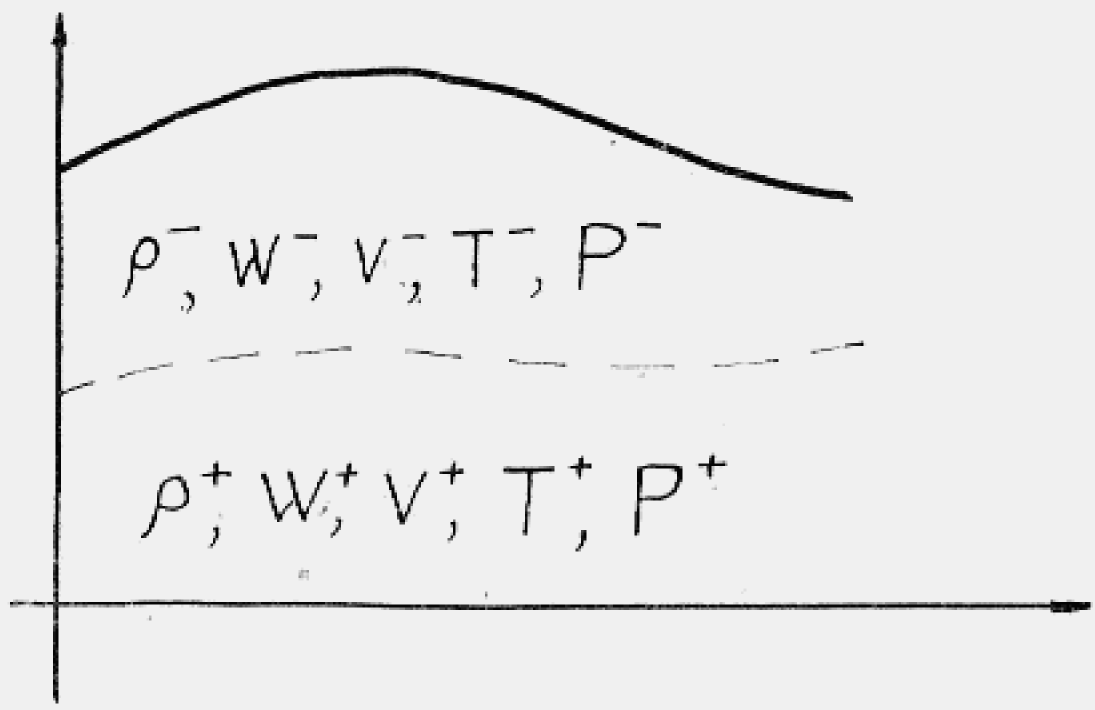

Рис. 3.

Область течения делится линией контактного разрыва на две подобласти, в каждой из которых течение непрерывно. В плоскости x, ψ контактный разрыв – фиксированная прямая, параллельная оси Ox на которой должны выполняться условия совместности:

$$W^- = W^+, \qquad P^- = P^+,$$

$$T^- = T^+$$

$$\kappa^+ T^-_{\vec{n}} = \kappa^+ T^+_{\vec{n}}$$

$T_{\vec{n}}$ – производная по направлению нормали к линии контактного разрыва (в физической плоскости x, y). Итерационный счет организован в следующем порядке:
на первом этапе из условий совместности (18) и уравнений движений Эйлера находятся значения W, T, P на линии контактного разрыва. На втором и третьем этапах в областях ниже и выше контактного разрыва рассчитываются течения по методу расчета непрерывных течений, изложенному ранее. После чего вновь совершается переход к первому этапу расчетов и таким образом замыкается итерационный процесс.

Алгоритм расчета проверялся численно для случа., когда превышает примерно на порядок. Численные эксперименты показали сходимость алгоритма. Расчеты контролировались проверкой выполнения закона сохранения тока массы, который вычислялся на входе, средней части и выходе канала. Потери в средней части не превышали 2%, на выходе – 4%.

III глава диссертации посвящена вопросу сходимости итерационного процесса для задачи (15-16). Особенность данной задачи заключается в том, что из-за наличия в уравнении (15) функции $f(\psi)$ конечно-разностный оператор не является однородным относительно сеточной области [3] .

Сходимость метода доказывается для линеаризованной задачи с "замороженными" коэффициентами [1] Оператор перехода разностной задачи [5] представляется в виде произведения однородного оператора и оператора, характеризующего $f(\psi)$ При этом этот последний оператор выписывается в явном матричном виде, что позволяет произвести характеристику ее спектральных свойств. Привлечение для исследования однородного оператора метода энергетических неравенств [6] позволяет установить, что процесс сходится, если выполнено условие $\tau \leq \frac{4}{7} a_0 h^2$, где $a_0 = \max_{\psi} |\bar{V}(\psi)|$ см. (3).

Результаты, полученные в работе, представляют интерес для изучения локального поведения жидкости в плоских каналах, когда погранслой не успевает развиться и вязкостью можно принебречь, для задач о движении вращающихся с малой скоростью жидких масс [10] для задач движения и теплообмена двух разнородных несмешивающихся между собой жидкостей.

Основные результаты диссертации изложены в работах [7, 8, 9]

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. I. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, ФМ, 1961.

2. Курант Р. Уравнения с частными производными. "Мир", 1964.

3. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. "Наука", 1967.

4. Duglas I., Rachford H.H. On the numerecal solution of heat conduction probbms in two and three space variabbles. Transact of Amer. Math. Soc. v.82, N 2, 1956.

5. Лакс

6. Самарский А.А. Априорные оценки для разностных уравнений, ЖВМ и МФ, № 6, 1961.

7. Гуров Б.Г. Существование и существенность установившихся непотенциальных течений идеальной жидкости в плоских каналах. Численные методы М.С.С. т.I, № 3, 1970.

8. Гуров Б.Г., Яненко Н.Н., Якушев И.К. Численный расчет непотенциальных каналовых течений идеальной жидкости. Численные методы М.С.С. т.2, № 1, 1971.

9. Гуров Б.Г. О сходимости итерационного процесса с неоднородным разностным оператором. Численные методы М.С.С. № 2, 1971.

10. Г.Ламб. Гидродинамика. ГОСТ техиздат, 1947.

Подписано в печать 5.I.1972. МН 11002.
Формат бумаги 60х84, I/I6. Объем 0,7 п.л.
Тираж 220 Заказ №9.

Ротапринт НГУ Новосибирск,90