А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет математической секции Объединенного ученого совета по физико-математическим и техническим наукам

Ю.И.ШОКИН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

(008 Вычислительная математика)

Автореферат

диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель-
член-корреспондент АН СССР
профессор Н.Н.ЯНЕНКО

Новосибирск,
1969

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет математической секции Объединенного ученого Совета по физико-математическим и техническим наукам

г.Новосибирск, 90 тел. 65-05-63

"___" июля 1969 г. № 28-I-809 ФТ/2253

Совет математической секции Объединенного ученого Совета по физико-математическим и техническим наукам Сибирского отделения Академии наук СССР направляет Вам для ознакомления автореферат диссертации Ю.И.Шокина на тему "Некоторые вопросы теории разностных схем для гиперболических систем уравнений", представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук.

Заверенный учреждением отзыв об автореферате просим напра- ... секции Объединенного учено-

... объявлено за 10 дней до защи-

... и

(М.К.ФАГЕ)

7-1621-69

А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Совет математической секции Объединенного ученого Совета
по физико-математическим и техническим наукам

Ю.И.ШОКИН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

(008 Вычислительная математика)

А в т о р е ф е р а т
диссертации, представленной на соискание
ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
член-корреспондент АН СССР
профессор Н.Н.ЯНЕНКО

Новосибирск
1969

Диссертация выполнена
в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель –
член-корреспондент АН СССР Н.Н.ЯНЕНКО

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук Б.Л.РОЖДЕСТВЕНСКИЙ
кандидат физико-математических наук Ю.Е.БОЯРИНЦЕВ

Ведущее предприятие –
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ АН СССР

Диссертация выполнена
в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель –
член-корреспондент АН СССР Н.Н.ЯНЕНКО

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук Б.Л.РОЖДЕСТВЕНСКИЙ
кандидат физико-математических наук Ю.Е.БОЯРИНЦЕВ

Ведущее предприятие –
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ АН СССР

Диссертация состоит из введения и двух глав. Список литературы содержит 37 наименований.

Введение

п. I Метод конечных разностей является одним из основных среди численных методов интегрирования задач математической физики ввиду его универсальной применимости к широким классам дифференциальных уравнений: линейных и нелинейных, обыкновенных и с частными производными, с непрерывными и разрывными коэффициентами и различными начальными и граничными условиями.

Особенно широкое развитие метод конечных разностей получил в последние I5-20 лет в связи с появлением быстродействующих электронно-вычислительных машин, а литература по теории разностных схем насчитывает сотни наименований (см. работы [I]-[5], где приведена достаточно полная библиография). Как известно, суть этого метода состоит в замене производных, входящих в дифференциальное уравнение и краевые условия, конечно-разностными отношениями, а получающиеся при этом разностные схемы должны удовлетворять ряду требований: аппроксимации, устойчивости, дивергентности, монотонности и т.д. Построение разностных схем, удовлетворяющих определенным требованиям, представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Диссертация посвящена исследованию двух из многочисленных проблем, возникающих в теории разностных схем, а именно, вопросу устойчивости схем и вопросу аппроксимационной вязкости разностных уравнений для гиперболических систем уравнений.

Исследование проводится с помощью первого дифференциального приближения разностных схем, понятие которого было впервые высказано Н.Н.Яненко и затем окончательно сформулировано в работах [I4] - [I6].

п.II. Во введении дается краткое содержание работы по главам.

Глава I.

О связи устойчивости разностных схем и их первых дифференциальных приближений

Глава состоит из семи параграфов. В § I приводится ряд сведений из теории уравнений с частными производными и теории разностных схем. В частности, сформулировано определение неполной параболической системы. Система уравнений второго порядка с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j,k=1}^{S} C_{jk}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{S} \mathcal{D}_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

называется неполной параболической системой в точке (x°, t°), если при всех вещественных $\omega_1,\dots,\omega_S$, сумма квадратов которых равна единице, собственные значения определителя

$$\det \left\| -\sum_{j,k=1}^{S} \omega_j \omega_k C_{jk}(x^\circ,t^\circ) - \lambda I \right\|$$

имеют неположительные действительные части:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j \le 0 \qquad (j=1,\dots,m)$$

Здесь $\mathcal{D}_j(x,t)$, $C_j(x,t)$ - $m \times m$ матрицы, I - единичная матрица.

В § 2 дается определение первого дифференциального приближения разностной схемы. Пусть $\Lambda(t,x,\tau,h,T)$ - разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}(t,x,D)$. Здесь

$$D=\{D_0,D_1\}\ ,\ T=\{T_0,T^1\}\ ,\ D_0=\frac{\partial}{\partial t}\ ,$$

$$D_1=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_S}\right\}\ ,\ T^1\ \{T_1,\dots,T_S\}\ ,$$

T_0 - оператор сдвига по оси t , T_j - оператор сдвига по оси x_j , τ , h - сеточные параметры. Известно следующее операторное представление:

$$T_0 = e^{\tau D_0}\ ,\ T_j = e^{h_j \frac{\partial}{\partial x_j}} \qquad (j=1,\dots,S)$$

Разлагая оператор $\Lambda(t,x,\tau,h,T)=\Lambda(t,x,\tau,h,e^{\tau D_0},e^{hD_1})$ в ряд по параметрам τ, h и используя соотношение $h=h(\tau)$, получим

$$\Lambda(t,x,\tau,h,T)=\mathcal{L}(t,x,\tau,h,D)+R,$$

где

$$\mathcal{L}(t,x,\tau,h,D)=\mathcal{L}(t,x,D)+\tau^\alpha P(t,x,D),$$

$$R(t,x,\tau,h,D)=\sum_{\beta>\alpha}\tau^\beta P_\beta(t,x,D),$$

$\tau^\alpha P(t,x,D)$ – первые члены разложения (наименьшие по степени τ).

Оператор $\mathcal{L}(t,x,\tau,h,D)$ будем называть первым дифференциальным приближением разностного оператора $\Lambda(t,x,\tau,h,T)$, а уравнение $\mathcal{L}(t,x,\tau,h,D)u=0$ первым дифференциальным приближением разностного уравнения $\Lambda(t,x,\tau,h,T)u=0$

Для разностной схемы

$$u^{n+1}(x)=\Omega(T^1)u^n(x)=\sum_\alpha B_\alpha u^n(x+\tau\lambda_\alpha), \qquad (I)$$

аппроксимирующей гиперболическую систему

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{S}A_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad (2)$$

первое дифференциальное приближение рассматривается в двух видах:

I) гиперболической форме

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j,k=1}^{S}\tilde{C}_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{S}A_j\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

и

2) параболической форме

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{S}D_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+\sum_{j,k=1}^{S}C_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}, \qquad (3)$$

которая рассматривается на решении исходной системы и получается из гиперболической формы заменой $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ через производные по x_j :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j,k=1}^{S} A_j A_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{S} A_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Здесь $A_k(x,t)$, $B_\alpha(x,t)$, $C_{jk}(x,t)$; $D_k(x,t), \tilde{C}_{jk}(x,t)$ - $m \times m$ матрицы , $\lambda_\alpha = \{\lambda_\alpha^1, \ldots, \lambda_\alpha^S\}$ - вектора смещения,

$$D_j = A_j - \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{S} A_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \right],$$

$$\tilde{C}_{jk} = \frac{\tau}{2} \sum_\alpha \lambda_\alpha^j \lambda_\alpha^k B_\alpha ,$$

$$C_{jk} = \frac{\tau}{2} \left[\sum_\alpha \lambda_\alpha^j \lambda_\alpha^k B_\alpha - A_j A_k \right].$$

Предполагается, что схема (I) имеет первый порядок точности, т.е. выполнены следующие условия совместности:

$$\sum_\alpha B_\alpha = I \quad , \sum_\alpha \lambda_\alpha^j B_\alpha = A_j \quad (j = 1, \ldots, S)$$

В §3 сформулированы и доказаны в одномерном случае теоремы о связи устойчивости разностных схем и неполной параболичности их первых дифференциальных приближений. Везде в диссертации устойчивость рассматривается по норме пространства L_2.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} , \qquad (4)$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

и аппроксимируем её простой [6], [I4] разностной схемой первого порядка точности:

$$u^{n+1}(x) = \sum_{\alpha=1}^{2} B_\alpha u^n(x + \tau\lambda_\alpha) , \qquad (5)$$

где

$$\sum_{\alpha=1}^{2} B_\alpha = I \quad , \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha B_\alpha = A .$$

Параболическая форма первого дифференциального приближения схемы (5) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D}\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (6)$$

где

$$\mathcal{D} = A - \frac{\tau}{2}\left[\frac{\partial A}{\partial t} + A\frac{\partial A}{\partial x}\right], \qquad (7)$$

$$C = \frac{\tau}{2}\left[\sum \lambda_\alpha^2 B_\alpha - A^2\right]$$

Т е о р е м а I. Если A – липшиц-непрерывная симметрическая матрица, то неполная параболичность системы (6) является необходимым и достаточным условием устойчивости простой разностной схемы (5).

Аппроксимируем систему (4) трехточечной разностной схемой.

$$u^{n+1}(x) = \sum_{\alpha=-1}^{1} B_\alpha u^n(x+\alpha h), \qquad (8)$$

где

$$\sum_{\alpha=-1}^{1} B_\alpha = I, \quad \sum_{\alpha=-1}^{1} \alpha B_\alpha = \varkappa A, \quad \varkappa = \frac{\tau}{h} = \mathrm{const}$$

Параболическая форма первого дифференциального приближения схемы (8) имеет вид (6), где

$$C = \frac{h^2}{2\tau}\left[\sum_{\alpha=-1}^{1} \alpha^2 B_\alpha - \varkappa^2 A^2\right],$$

а $\mathcal{D}$ определяется по формуле (7).

Трехточечную схему (8) назовем м а ж о р а н т н о й [7], [8], [I4], если

$$B_1 = \varkappa A^+, \quad B_{-1} = -\varkappa A^-,$$

где

$$A^+ \geq 0, \quad A^- \leq 0, \quad A = A^+ + A^-$$

Имеют место

Т е о р е м а 2. Если A – симметрическая матрица, A^+, A^- – липшиц-непрерывные матрицы, то неполная параболичность мажорантной схемы является необходимым и достаточным условием устойчивости схемы.

Т е о р е м а 3. Пусть A - симметрическая матрица. Для того, чтобы устойчивая трехточечная разностная схема (8) была мажорантной, необходимо и достаточно выполнения следующих условий на коэффициенты схемы: I) $B'_\alpha = B_\alpha$, 2) $B_\alpha B_\beta = B_\beta B_\alpha$ $(\alpha, \beta = -1, 0, 1)$, 3) $B_1 B_{-1} = 0$.

Четвертый параграф посвящен анализу связи устойчивости схем расщепления и неполной параболичности их первых дифференциальных приближений.

Рассмотрим схему расщепления

$$u^{n+1}(x) = \Omega_s \Omega_{s-1} \ldots \Omega_1 u^n(x),$$

аппроксимирующую систему (2).

Т е о р е м а 4. Пусть $\Omega_j = \sum_{\alpha=1}^{2} B^j_\alpha T_j^{\tau\lambda^j_\alpha}$ $(j = 1, \ldots, s)$, т.е. рассмотрим простую схему расщепления. Если A_j -липшиц-непрерывные симметрические матрицы и первое дифференциальное приближение простой схемы расщепления является неполной параболической системой, то схема - устойчивая.

Т е о р е м а 5. Рассмотрим мажорантную схему расщепления

$$\Omega_j = æ_j A^+_j T_j + (I - æ_j |A_j|)E - æ_j A^-_j T_{-j}, \quad A_j = A^+_j + A^-_j,$$

$A^+_j \geq 0$, $A^-_j \leq 0$, $|A_j| = A^+_j - A^-_j$. Если A_j - симметрические матрицы, A^+_j , A^-_j - липшиц - непрерывные матрицы и первое дифференциальное приближение мажорантной схемы расщепления является неполной параболической системой, то схема - устойчивая.

В § 5 для анализа устойчивости разностных схем используется гиперболическая форма первых дифференциальных приближений.

Аппроксимируем систему (2) мажорантной схемой:

$$u^{n+1}(x) = (I - \sum_{j=1}^{s} æ_j |A_j|) u^n(x) + \sum_{j=1}^{s} (æ_j A^+_j T_j - æ_j A^-_j T_{-j}) u^n(x) \qquad (9)$$

и схемой Лакса [9]:

$$u^{n+1}(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{s} I + æ_j A_j\right) T_j + \left(\frac{1}{s} I - æ_j A_j\right) T_{-j}\right] u^n(x). \qquad (10)$$

Гиперболические формы их первых дифференциальных приближений имеют, соответственно, вид:

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{s}\frac{h_j}{2}|A_j|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+\left(\sum_{j=1}^{s}A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\tau}{2sh_j^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+\left(\sum_{j=1}^{s}A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Обозначим через Q область зависимости точки (x,t) для системы (2), а через Q' область зависимости точки (x,t) гиперболической формы первого дифференциального приближения:

Справедливы

Т е о р е м а 6. Если I) A_j – симметрические матрицы, 2) A_j^+, A_j^- – липшиц – непрерывные матрицы и 3) $Q\subset Q'$, то мажорантная схема (9) является устойчивой.

Т е о р е м а 7. Если A_j – липшиц-непрерывные симметрические матрицы и $Q\subset Q'$, то схема Лакса (I0) является устойчивой.

В § 6 показано, что замечания о линейных уравнениях справедливы и для разностных схем, аппроксимирующих уравнения газовой динамики. С помощью первого дифференциального приближения проведен анализ многочисленных схем, которые были применены в работе [I0] для расчета течений с большими деформациями. Для этих схем получены условия как с помощью первых дифференциальных приближений, так и методом Неймана. При этом первый способ оказался менее трудоемким, чем второй. В некоторых случаях метод первого дифференциального приближения дал более жесткие условия устойчивости схем, чем метод Неймана. Численные расчеты показали, что такие ограничения приводят к лучшему поведению разностного решения. Критерии, полученные в этом параграфе, используются в дальнейшем при построении разностных схем для системы уравнений газовой динамики.

§ 7 посвящен исследованию асимптотического поведения решений разностных схем.

Рассмотрим разностную задачу Коши

$$u^{n+1}(x)=\sum_{\alpha}B_\alpha u^n(x+\tau\lambda_\alpha),\quad u^0(x)=u_0(x),\qquad \text{(II)}$$

аппроксимирующую дифференциальную задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0)=u_0(x).$$

Здесь A, B_α – постоянные $m\times m$ матрицы, схема (II) имеет первый порядок точности.

Имеет место

Т е о р е м а 8. Если B_α – симметрические и попарноперестановочные матрицы, то при больших t ($n\to\infty$, τ – фиксировано) решение разностной задачи (II) стремится в некотором пространстве обобщенных функций к решению задачи Коши для первого дифференциального приближения схемы с той же начальной функцией.

Доказательство утверждения следует работам [I], [II].

С л е д с т в и е. Если A – симметрическая матрица, то решения простой и мажорантной схем стремятся при больших t ($n\to\infty$, τ – фиксировано) к решению задачи Коши для их первых дифференциальных приближений.

Аппроксимируем задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{S} a_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad u(x,0)=u_0(x)$$

разностной схемой

$$u^{n+1}(x) = \sum_j b_j u^n(x+\tau\lambda_j), \quad u^0(x)=u_0(x). \qquad (I2)$$

Здесь $a_k = const$, $b_j = const$, $\lambda_j = \{\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^S\}$,

$$\sum_j b_j = 1, \quad \sum_j \lambda_j^k b_j = a_k \quad (k=1,\dots,S)$$

Т е о р е м а 9. При больших t ($n\to\infty$, τ – фиксировано) решение разностной задачи (I2) стремится в некотором пространстве обобщенных функций к решению задачи Коши для ее первого дифференциального приближения с той же начальной функцией.

Глава П.

Аппроксимационная вязкость разностных схем.

п.I. При решении задач математической физики (в частности, задач газовой динамики) конечно-разностными методами возникают эффекты аппроксимационной вязкости, т.е. вязкости, порождаемой структурой разностных схем. Численные расчеты показывают, что свойства разностной схемы особенно сильно проявляются при взаимодействии разрывов. В областях взаимодействия возникают большие отклонения газодинамических параметров от истинных значений. Эти отклонения ведут себя по-разному в зависимости от диссипативных свойств схемы и разностной сетки.

В зависимости от диссипативных свойств разностные схемы можно разделить на два класса. Во-первых, схемы, допускающие контактные разрывы. В этом случае, как показано в монографии [I], существует семейство стоячих гармонических волн, на которые не действует аппроксимационная вязкость и, которые, следовательно, не затухают. Этим стоячим волнам отвечает "энтропийный след" - резкие отклонения энтропии и плотности от точных значений, в то время как давление и скорость разностного решения близки к точным. "Энтропийный след" остается в окрестности контактной границы и имеет характер сильного немонотонного отклонения от истинных профилей плотности и энтропии. Примером таких схем является схема Неймана-Рихтмайера [I2], подробно исследованная в монографии [I]. Величина "энтропийного следа" зависит также от параметров схемы (см. [I]).

Ко второму классу относятся схемы, недопускающие контактных разрывов. В этом случае разрывы плотности и энтропии сглаживаются. В таких схемах "энтропийные следы" исчезают, но исчезают ("размазываются") и контактные разрывы (см. [I]), что не всегда желательно. Примером таких схем является схема Лакса [9].

Изучению дисперсионных свойств разностных схем посвящён целый ряд исследований (см.работы [I], [2], [4], [9], [I3], где приведена также достаточно полная библиография.) В настоящей диссертации с помощью понятия первого дифференциального приближения исследуются условия, при которых разностные схемы, обладающие аппроксимационной вязкостью, сохраняют контактные разрывы.

п. 2. В § I исследуется аппроксимационная вязкость разностных схем для гиперболических систем уравнений типа уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах.

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений (4) с постоянными коэффициентами. Матрица A имеет различные вещественные собственные значения $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и предположим, что одно из собственных чисел матрицы A равно нулю, то есть существует вектор X такой, что $XA = 0$. Таким свойством обладает матрица системы уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{I3}$$

где u - скорость, p - давление, v - удельный объем, x - лагранжева координата, $a^2 = (\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + p)/\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}$, ε - удельная энергия. Будем считать, что $a^2 = const$ или, что то же, рассматривать систему в каждой точке (x, t), фиксируя коэффициенты. В этом случае анализ системы (I3) и аппроксимирующих её схем дает только качественную оценку нелинейной системы уравнений газовой динамики и, по существу, означает линеаризацию уравнений в окрестности течения с постоянными параметрами. Тем не менее, такие качественные выводы подтверждаются практическими расчетами.

Сопоставим системе (4) следующую схему первого порядка точности:

$$u^{n+1}(x) = \sum_\alpha B_\alpha u^n(x + \alpha h) = \Omega(T_1) u^n(x), \tag{I4}$$

где B_α - постоянные $m \times m$ матрицы, $\varkappa = \frac{\tau}{h} = const$,

$$\sum_\alpha B_\alpha = I, \quad \sum_\alpha \alpha B_\alpha = \varkappa A,$$

$$\Omega(T_1) = \sum_\alpha B_\alpha T_1^\alpha .$$

Первое дифференциальное приближение схемы (I4) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{I5}$$

где

$$C = \frac{h^2}{2\tau}\left[\sum_{\alpha} \alpha^2 B_{\alpha} - \varkappa^2 A^2\right].$$

Таким образом, разностная схема добавляет к исходной системе "вязкий" член $C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Определение I. Разностная схема (I4) обладает свойством K, если из соотношения $XA = 0$ следует, что $XC = 0$.

Определение 2. Разностная схема (I4) обладает сильным свойством K, если из соотношения $XA = 0$ следует, что

$$XR = X[\Omega(e^{ikh}) - I] = 0,$$

где

$$\Omega(e^{ikh}) = \sum_{\alpha} B_{\alpha} e^{ik\alpha h}.$$

При переходе к системе уравнений газовой динамики получаем, что наличие у схемы аппроксимационной вязкости, сохраняющей контактный разрыв, равносильно тому, что схема обладает свойством K.

Имеют место

Теорема I0. Для того, чтобы простая схема (5) обладала свойством K (сильным свойством K), необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: I) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ или 2) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

Следствие I. Простая схема (5) обладает сильным свойством K тогда и только тогда, когда она обладает свойством K.

Следствие 2. Схема Лакса [9] не обладает ни одним из вышеуказанных свойств.

Теорема II. Необходимым и достаточным условием того, что трехточечная схема обладает свойством K (сильным свойством K) является выполнение равенства $XB_0 = X$.

Следствие I. Трехточечная схема обладает сильным свойством K тогда и только тогда, когда она обладает свойством K.

Следствие 2. Мажорантная схема обладает как свойством K, так и сильным свойством K.

Аппроксимируем систему (4) схемой предиктор-корректор

$$u^*(x) = \sum_\alpha B_\alpha u^n(x + \tau^* \lambda_\alpha), \qquad (16)$$

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) + \varkappa A\left[u^*\left(x + \frac{h}{2}\right) - u^*\left(x - \frac{h}{2}\right)\right], \qquad (17)$$

где (I6) – произвольная схема, а (I7) – схема "крест".

Т е о р е м а I2. Схема предиктор-корректор (I6)-(I7) обладает свойством K и сильным свойством K.

С л е д с т в и е. Схема Лакса-Вендроффа [I3] обладает обоими свойствами K.

Рассмотрим для системы (4) неявные схемы первого порядка точности:

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} B_\alpha(\gamma T_0 + \delta E) u^n(x + \tau\lambda_\alpha), \qquad (18)$$

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) + \sum_{\alpha=-1}^{1} B_\alpha(\gamma T_0 + \delta E) T_1^\alpha u^n(x), \qquad (19)$$

где

$$\gamma + \delta = 1, \quad \gamma, \delta \geq 0$$

Т е о р е м а I3. I. Схема (I8) обладает свойством K. 2. Если собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенству

$$|\gamma(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(e^{ik\tau\lambda_1} - e^{ik\tau\lambda_2})\xi_j| < 1 \quad (j = 1, \ldots, m),$$

то схема (I8) обладает сильным свойством K.

Т е о р е м а I4. Схема (I9) обладает свойством K тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $XB_0 = 0$. 2. Если $XB_0 = 0$ и собственные значения матрицы $i\varkappa A \sin kh + B_0(1 - \cos kh)$ по модулю меньше единицы, то схема (I9) обладает сильным свойством K.

Возникает вопрос о схемах повышенного порядка точности и об оценках влияния членов со старшими производными, которые мы отбрасываем при выводе первого дифференциального приближения. В диссертации показано, что влияние отбрасываемых членов на аппроксимационной вязкости не сказывается. Анализ аппроксимационной вязкости схем первого порядка точности может быть перенесен и на схемы повышенного порядка точности.

Доказанные утверждения были использованы при построении устойчивых разностных схем, обладающих свойством сохранения контактных разрывов и аппроксимирующих систему уравнений газовой динамики (I3).

п. 3. В § 2 исследуется аппроксимационная вязкость разностных схем для гиперболических систем уравнений типа уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах.

Рассмотрим гиперболическую систему дифференциальных уравнений (4) с постоянными коэффициентами и предположим, что ни одно из собственных чисел $\xi_1, \quad, \xi_m$ матрицы A не равно нулю. В частности, аналогичным свойством обладает система уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A\frac{\partial w}{\partial x},$$

где

$$w = \begin{pmatrix} u \\ \rho \\ E \end{pmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} \frac{u}{\rho}p_\varepsilon - u & -\frac{1}{\rho}p_\rho & -\frac{1}{\rho}p_\varepsilon \\ -\rho & -u & 0 \\ \frac{u^2}{2}p_\varepsilon - \frac{p}{\rho} & -\frac{u}{\rho}p_\rho & -(u+\frac{u}{\rho}p_\varepsilon) \end{Vmatrix},$$

$$E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad p = p(\varepsilon, \rho).$$

Зафиксируем одно из собственных значений $\xi_j = q$ матрицы A (в случае системы (20) $\xi_1 = -u$) и определим соответствующий собственный вектор X: $XA = qX$.

Аппроксимируем систему (4) разностной схемой вида (I4). Первое дифференциальное приближение этой схемы имеет вид (I5).

Определение. Разностная схема (I4) обладает свойством K, если из соотношения $XA = qX$ следует, что $XC = 0$

Имеют место

Теорема I5. Простая разностная схема обладает свойством K, тогда и только тогда, когда либо $\lambda_1 = q$, либо $\lambda_2 = q$.

Теорема I6. Для того, чтобы трехточечная разностная схема (8) обладала свойством K, необходимо и достаточно выполнения условия $XB_0 = (1 - \varkappa^2 q^2)X$.

Следствие I. Схема Лакса не обладает свойством K.

Следствие 2. Мажорантная схема не обладает свойством K.

Т е о р е м а I7. Схема предиктор-корректор (I6)-(I7) не обладает свойством K .

Т е о р е м а I8. Для того чтобы схема (I9) обладала свойством K , необходимо и достаточно выполнение условия $\chi B_0 = (\gamma - \delta)\varkappa^2 q^2 \chi$

На практике часто применяются схемы вида

$$\sum_{\alpha=-1}^{1} D_\alpha u^{n+1}(x+\alpha h) = \sum_{\alpha=-1}^{1} B_\alpha u^n(x+\alpha h), \qquad (21)$$

где

$$\sum_{\alpha=-1}^{1} D_\alpha = \sum_{\alpha=-1}^{1} B_\alpha = I,$$

$$\sum_{\alpha=-1}^{1} \alpha (B_\alpha - D_\alpha) = \varkappa A$$

Т е о р е м а I9 Схема (2I) обладает свойством K тогда и только тогда, когда

$$\chi(D_0 - B_0) = 2\varkappa q \chi (D_1 - D_{-1}) + \varkappa^2 q^2 \chi .$$

Сформулированные утверждения были использованы для построения разностных схем, обладающих свойством K и аппроксимирующих систему уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах (20). Построен класс устойчивых схем. При построении были использованы условия неполной параболичности первых дифференциальных приближений и условия о связи областей зависимости схемы и гиперболической формы первого дифференциального приближения.

Результаты диссертации докладывались на Всесоюзном семинаре по численным методам механики вязкой жидкости (Киев,1968), Украинском республиканском симпозиуме по дифференциальным уравнениям (сентябрь,1968); Конференции по совершенствованию научных кадров в Яблонцах (Польша, май,1968), Летней математической школе в Бездружицах (Чехословакия, июнь, 1968); Международном симпозиуме по вычислительным методам в гидродинамике (Стэндфорд, США, август, 1968); семинаре по вычислительным методам механики сплошной среды НГУ, руководимом Н.Н.Яненко и опубликованы в работах [14] - [22].

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю члену-корреспонденту АН СССР, профессору Н.Н.Яненко за постоянное внимание и руководство работой.

Литература

I. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко. Системы квазилинейных уравнений, М., I968.

2. Р.Д.Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач., ИЛ, М., I960.

3. Н.Н.Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. "Наука", I967.

4. С.К.Годунов. Разностные методы решения уравнений газовой динамики", Лекции для студентов НГУ, I962.

5. P.D.Lax. Hyperbolic difference equations: a review of the Courant-Friedrichs-Lewy paper in the light of recent developments. IBM Journal Research and Development, 11, 2(1967), 235 - 238.

6. S.G.Hahn. Stability criteria for difference schemes. Comm. Pure and Appl, Math., 11, 2(1958), 243 - 255.

7. Н.Н.Яненко. Некоторые вопросы теории сходимости разностных схем с постоянными и переменными коэффициентами. Тр. МИАН СССР, т.2, Л., I964.

8. Н.Н.Анучина. Некоторые разностные схемы для гиперболических систем. Тр.МИАН СССР, 74 (I966), 5-I5.

9. P.D.Lax. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Comm. Pure and Appl. Math., 7, 1 (1954), 159 - 193.

I0. В.Е.Петренко. Методы расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями. Отчет ВЦ СО АН СССР, I969.

II. А.И.Жуков. Предельная теорема для разностных операторов. УМН, I4, 3(87) (I959), I29-I36.

I2. Von Neumann J., R.D.Richtmyer. A method for numerical calculation of hydrodynamical shocks. J. Appl. Phys., 21 (1950), 232.

13. P.D.Lax, B.Wendroff. Systems of conservation laws III. Comm. Pure and Appl. Math., 13, 1 (1960), 217 - 238.

14. Н.Н.Яненко, Ю.И.Шокин. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем. ДАН СССР, 182, № 4(1968), 776-778.

15. Ю.И.Шокин, Н.Н.Яненко. О связи корректности первых дифференциальных приближений и устойчивости разностных схем для гиперболических систем уравнений. Матем. заметки, 4, № 5 (1968), 493-502.

16. Н.Н.Яненко, Ю.И.Шокин. Об аппроксимационной вязкости разностных схем. ДАН СССР, 182, 2(1968),280-281

17. Ю.И.Шокин. Об асимптотическом поведении решений разностных схем. Известия СО АН СССР, 3 вып.I (1969), 65-68.

18. Н.Н.Яненко, Ю.И.Шокин. Об аппроксимационной вязкости разностных схем для гиперболических систем уравнений. Тр.Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Изд."Наука", Н.,1969.

19. Ю.И.Шокин. Об аппроксимационной вязкости неявных разностных схем. Тр.Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Изд."Наука", Н., 1969.

20. Ю.И.Шокин. О связи корректности первых дифференциальных приближений и устойчивости некоторых разностных схем. Тр.Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Изд. "Наука", Новосибирск, 1969.

21. Н.Н.Яненко, Ю.И.Шокин. О первом дифференциальном приближении разностных схем. Тр.Украинского республиканского симпозиума по дифференциальным уравнениям, 1968.

22. N.N.Yanenko and Ju.I.Shokin. First differential approximation method and approximation viscosity of difference scheme. International Symposium on High Computing in Fluid Dynamics. Standford, California, USA, August, 1968.

Подписано к печати 2/7 – 69 г. МН00280

Формат бумаги 60Х84, 1/16 Объем 1,25 п.л., уч.изд.л.

Заказ 231 . Тираж 220.

Отпечатано в Новосибирском государственном университете
Новосибирск, 90.