АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Сибирское отделение

СОВЕТ СЕКЦИИ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
ОБЪЕДИНЕННОГО УЧЁНОГО СОВЕТА ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ И ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ

На правах рукописи

Ю.Н.Ватолин

О РЕШЕНИИ УПРУГИХ ЗАДАЧ С ТРЕНИЕМ

Специальность 041

Теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации, представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук.

Новосибирск 1968

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Сибирское отделение

СОВЕТ СЕКЦИИ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
ОБЪЕДИНЕННОГО УЧЁНОГО СОВЕТА ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ
И ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ

На правах рукописи

Ю.Н.Ватолин

О РЕШЕНИИ УПРУГИХ ЗАДАЧ С ТРЕНИЕМ

Специальность 04I
Теоретическая и математическая
физика

Автореферат диссертации,
представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических
наук.

Работа выполнена в Вычислительном центре СО АН СССР

Научные руководители: член-корреспондент АН СССР Н.Н.Яненко

Официальные оппоненты: доктор технических наук Е.И.Шемякин, доктор физико-математических наук А.С.Алексеев.

Ведущая организация: Ленинградский Политехнический институт имени М.И.Калинина.

Автореферат разослан "......".............1968 г.

Защита диссертации состоится в июне 1968 г. на заседании Совета секции общей и прикладной физики Объединенного учёного Совета по физико-математическим и техническим наукам Сибирского отделения Академии наук СССР (Новосибирск-90, Проспект науки, 21, Президиум СО АН). Место защиты: Институт физики полупроводников, конференц-зал.

О дне защиты диссертации будет сообщено за десять дней в газете "Советская Сибирь".

Ученый секретарь Совета
кандидат физ-мат.наук (ГЕЙЦИ И.И.)

Настоящая работа связана, в основном, с механикой твердого тела, рассматриваемого как сплошная среда в рамках линейной теории упругости с трением на границе раздела. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, приложения и содержит 104 страницы текста и 11 рисунков.

Постановку упругих задач можно найти, например, в [I, 2, 3]. При этом для учёта трения и скольжения [4, 5] обычно пользуются законом трения Амонтона-Кулона, постулирующим пропорциональность силы сопротивления скольжению одного тела по поверхности другого (в некоторой точке их соприкосновения) нормальному прижимающему усилию в той же точке. В соответствии с экспериментом знак силы сопротивления скольжению нужно считать противоположным знаку относительной скорости скольжения [6]. Большая работа по изучению законов трения в настоящее время проводится Крагельским [7]. Трудность разработки соответствующей проблемы в классической теории упругости в ряде случаев заставляет вернуться к неголономной теоретической механике [8 ÷ II].

Наиболее наглядно и доступно результат трения можно проследить на примере удара 2-х абсолютно жёстких тел [II]. В каком-то смысле модель абсолютно твёрдого тела соответствует упругой модели при достаточно большом модуле сдвига.

В силу линейности своих уравнений теория упругости оказалась тесно связанной с методами Фурье - преобразований. На этом пути удалось, например, получить весьма ценные для практики решения о распространении плоских упругих волн в средах с внутренними границами [I, 2, I2, I3] . Подробное исследование рассеяния волн на плоских границах раздела проведено Гоголадзе [I4] и Нарышкиной [I5]. Ряд расчётов сред с плоскопаралельными границами проведено Огурцовым (динамические плоские задачи) [I6], Васильевым [I7] (сосредоточенные силы), Вишняковым (трехмерные задачи со смешанными граничными условиями специального вида и учётом нагревания) [I8] , Галфаяном (плоские задачи без трения на внутренних границах) [I9], Сеймовым, Николаенко (контакт-плит) [20, 2I] и др. В рамках вышеупомянутых методов находятся многочисленные исследования температурных динамических задач теории упругости Даниловской [22, 23] , Паркуса [24]. Решение ряда задач с учётом тепла, выделяющегося на внутренней границе раздела двух сред за счет трения скольжения, связано с Дмитриевым [25], Лингом [26], Коровчинским [27] , Рыкалиным [28], Розенталем [29] и др.

Со времен Бетти (конец XIX века) важное место в теории упругости отводится эквивалентной дифференциальным уравнениям системе сингулярных интегральных уравнений [30] , учитывающих не только форму области решения, но начальные и граничные условия задач теории упругости. Это представление оказалось весьма эффективным не только для доказательства теорем существования и единственности Купрадзе [30], Гегелиа [3I], но и послужило основой ряда приближенных методов решения упругой задачи. Среди них можно выделить разрабатываемый Купрадзе [30] метод обобщённых рядов и прямого обращения матриц. Используя мощный аппарат теории функций комплексного переменного, Колосову [30] и Мусхелишвили [33] в случае статической плоской задачи удается найти весьма общие решения этой системы интегральных уравнений в довольно произвольной геометрии. С помощью интегральных уравнений со времен Герца (I88I г.) [I] решаются актуальные задачи давления жёсткого гладкого или шероховатого штампа на упругое полупространство Чаплыгиным [34] , Галиным [35] , Бородачевым [36], Ростовцевым [37] , Закорко [38] и др.

В этих работах существенными являются общий аппарат уравнений Фредгольма I и II рода, теория интегрального уравнения Абеля, интегральные преобразования, полиномиальные решения.

С появлением вычислительной техники стала весьма перспективной разработка приближенных методов расчёта упругих задач.

В работе Фадеева [39] программным путем рассчитываются Фурье-разложения. Много работ посвящено методу сеток для статических задач и получению решения как прямым обращением получающихся матриц, так и использованием различных итерационных процессов. Разностный алгоритм для динамической задачи теории упругости предложен в [40] Кабуловым. На основе метода расщепления [41] были разработаны и обоснованы весьма эффективные разностные методы счёта статических и динамических плоских задач теории упругости в прямоугольнике Коноваловым [42, 43] и Самарским [44].

До сих пор не существует эффективных алгоритмов расчёта задач дифракции. Работы Н.Н.Яненко [41] указывают здесь эффективный подход, основанный на методе расщепления, применение которого должно существенно облегчить вычислительную работу при нахождении экономичного, эффективно сходящегося к точному решению алгоритма, учитывающего специфику граничных условий.

п. I. В нашей работе (гл.I) рассмотрены задачи соударения абсолютно жёстких тел с учётом трения Кулона. На основе законов сохранения и законов трения получена замкнутая система 13 уравнений для определения 3-х компонент поступательной $\overline{u}_{\alpha i}$, вращательной $\overline{\omega}_{\alpha i}$ скорости α -го тела, а также возможной феноменологически скорости δg пластической деформации в точке удара в рамках определенной модели [45].

Пусть m_α - массы сталкивающихся тел произвольной формы, α - везде нумерует тело; $J_{\alpha ik}$ - проекция тензора инерции на оси координат, i, k, ℓ - везде нумеруют проекции радиус-вектора идущего из центра тяжести α -го тела в начало координат. Пусть $u_{\alpha i}$ и $\omega_{\alpha i}$ проекции скоростей поступательного и вращательного соответственно движений до столкновения, $\overline{u}_{\alpha i}$ и $\overline{\omega}_{\alpha i}$ тоже после столкновения. $M_{\alpha i}$, $\overline{M}_{\alpha i}$ - момент импульса тела до и после столкновения; M_i - изменение момента импульса за время соударения; P_i - изменение импульса в процессе столкновения; f, h, h_0, f_0 - коэффициенты трения скольжения, качения, верчения, проникновения соответственно; η, η_0, σ, σ_0 коэффициенты демпфирования при скольжении, проникновении, качении, верчении соответственно; δu_i , $\delta \omega_i$ – скорости относительного поступательного, вращательного движений в точке соударения; δg – скорость пластического деформирования; γ_0, γ – доля работы трения проникновения, скольжения соответственно превращающихся в тепло; g , g_0 – доля работы трения качения, верчения соответственно превращающихся в тепло; M_0 , M , Π , Π_0 – сопротивление верчению, качению, скольжению, проникновению (прочности) при нулевых скоростях соударения; β , $\beta 1$, $\beta 2$ коэффициенты симметрии.

Выберем начало правой системы координат в точке столкновения с осью Z по внешней нормали $\bar{n}$ к поверхности 2-го тела в точке столкновения и набор касательных векторов $\tau 1$, $\tau 2$. Тогда система определяющих уравнений примет вид:

$$i, k, \ell = 1 \div 3;\ f, h, h_0, f_0, \eta, \eta_0, \sigma, \sigma_0 \neq 0;$$

$$0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma_0, g, g_0 \leq 1;$$

а) Закон сохранения импульса (главный вектор сил в точке соударения равен нулю).

$$P_i = m_1 \bar{u}_{1i} - m_1 u_{1i} = m_2 u_{2i} - m_2 \bar{u}_{2i}. \qquad (1)$$

По условию соударения $P_3 \neq 0$ везде.

б) Закон сохранения момента количества движения (главный вектор моментов в точке столкновения равен нулю)

$$M_1 = \bar{M}_{11} - M_{11} = \bar{M}_{21} - M_{21}; M_2 = \bar{M}_{12} - M_{12} = \bar{M}_{22} - M_{22}; \qquad (2)$$

$$M_3 = \bar{M}_{13} - M_{13} = M_{23} - \bar{M}_{23}, \qquad (3)$$

где

$$M_{\alpha i} = \sum_{k=1}^{3} J_{\alpha i k} \omega_{\alpha k} + \sum_{\ell, k=1}^{3} \varepsilon_{i k \ell} x_{\alpha k} m_\alpha u_{\alpha \ell}; \qquad (4)$$

$$\bar{M}_{\alpha i} = \sum_{k=1}^{3} J_{\alpha i k} \bar{\omega}_{\alpha k} + \sum_{\ell, k=1}^{3} \varepsilon_{i k \ell} x_{\alpha k} m_\alpha \bar{u}_{\alpha \ell}. \qquad (5)$$

$\varepsilon_{ik\ell}$ – единичный трехмерный псевдотензор.

в) Закон жесткого контакта для касательной компоненты скорости перпендикулярной действия касательного импульса

$$\delta u_{\theta_2} \equiv \delta u_1 P_2 - \delta u_2 P_1 = 0, \tag{6}$$

где

$$\delta u_i \equiv \beta(v_{1i} - v_{2i}) + (1-\beta)(\bar{v}_{1i} - \bar{v}_{2i}); \tag{7}$$

$$v_{\alpha i} \equiv u_{\alpha i} + \sum_{k,\ell=1}^{3} \varepsilon_{ik\ell}\, \omega_{\alpha k}\, x_{\alpha\ell};$$

$$\bar{v}_{\alpha i} \equiv \bar{u}_{\alpha i} + \sum_{k,\ell=1}^{3} \varepsilon_{ik\ell}\, \bar{\omega}_{\alpha k}\, x_{\alpha\ell};$$

г) Закон трения скольжения

$$\sqrt{P_1^2 + P_2^2} = f P_3 + \Pi + \eta |\delta u_{\tau_1}|, \tag{8}$$

где

$$\delta u_{\tau_1} \equiv -(P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2) / \sqrt{P_1^2 + P_2^2};$$

д) Закон трения верчения

$$M_3 = h_0 P_3 + M_0 + \sigma_0 |\delta\omega_3|, \text{ где}$$

$$\delta\omega_3 \equiv \beta_1(\omega_{13} - \omega_{23}) + (1-\beta_1)(\bar{\omega}_{13} - \bar{\omega}_{23}); \tag{9}$$

е) Закон трения качения

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2} = h P_3 + M + \sigma |\delta\omega_{\tau_2}|;$$

$$\delta\omega_{\tau_2} \equiv (M_1 \delta\omega_1 + M_2 \delta\omega_2) / \sqrt{M_1^2 + M_2^2}; \tag{I0}$$

$$\delta\omega_{i=1,2} \equiv \beta_2(\omega_{1i} + \omega_{2i}) + (1-\beta_2)(\bar{\omega}_{1i} + \bar{\omega}_{2i});$$

ж) Закон жёсткого контакта для компоненты качения перпендикулярной направлению действия момента качения

$$\delta u_{\theta_2} \equiv M_2 \delta\omega_1 - M_1 \delta\omega_2 = 0; \tag{II}$$

з) Закон пластической деформации

$$P_3 = f_0 P_3 + \Pi_0 + \eta_0 |\delta g|; \quad \delta g = -\frac{P_3}{|P_3|} |\delta g|; \tag{I2}$$

и) Закон сохранения энергии

$$\mathcal{E} \equiv -\gamma_0 P_3 |\delta g| - \gamma \sqrt{P_1^2 + P_2^2}\, |\delta u_{\tau_1}| - \gamma_0 \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\, \delta\omega_{\tau_2} - g_0 |M_3\, \delta\omega_3|$$

$$\bar{E} - E = \mathcal{E} \leq 0, \text{ где} \tag{I3}$$

$$E = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i u_{\alpha i}^2}{2} + \sum_{\kappa=1}^{2}\frac{J_{\alpha i\kappa}\,\omega_{\alpha i}\,\omega_{\alpha\kappa}}{2}\right);$$

$$\bar{E} = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i \bar{u}_{\alpha i}^2}{2} + \sum_{\kappa=1}^{3}\frac{J_{\alpha i\kappa}\,\bar{\omega}_{\alpha i}\,\bar{\omega}_{\alpha\kappa}}{2}\right).$$

Устремив, например, $\eta, \eta_0, \sigma, \sigma_0 \to \infty$, можно получить из решения уравнений I–I3 решение уравнений с условиями жёсткого контакта.

Рассмотрен целый ряд частных случаев соударения. Так при соударении вращающихся шаров имеет место превращение вращательного движения в поступательное с учётом законов сохранения. Даже при сколь угодно маленькой скорости соударяющихся тел, последние разлетаются с конечной скоростью [46], зависящей от коэффициента трения верчения. Наибольшая величина отскока получается при коэффициенте трения верчения h_0 порядка радиуса инерции. Последнее с феноменологической точки зрения соответствует структуре шара большого радиуса, основная масса которого сосредоточена в центре. Аналогичные результаты получены для касательного удара. Подсчитано сечение рассеяния двух шаров [2], параметры пластичного соударения и рассмотрены его свойства. Обсуждается феноменологическая оценка температуры соударяемых тел.

п. 2. В главе П на основе метода плоских волн получено автомодельное решение задачи об источнике возмущений, бегущем по границе раздела двух упругих сред с трением [47]. В § 2–4 главы обсуждается наиболее интересный случай одинаковых сред, когда волны проходят "не замечая" границу раздела в условиях жёсткого контакта. Роль трения состоит в том, что оно "рождает" новые волны. Происходит распад одной волны на несколько волн. В угле падения α_0 продольной волны наблюдается щель до появления скольжения. Допустимые границы области скольжения задаются неравенством

$$\alpha_-^2 \le \alpha^2 \le \alpha_+^2;\quad \alpha_\pm^2 = \left(f^2 + \mu \pm \sqrt{(f^2+\mu)^2 - f^2(1+f^2)}\right)\Big/\left(2\mu(1+f^2)\right); \qquad (I4)$$

$$\alpha = \sin\alpha_0.$$

f – коэффициент трения Кулона, μ – безразмерный модуль сдвига. Скольжение невозможно при

$$f^2 \ge \frac{\mu^2}{1-2\mu} \ge f_*^2 = \frac{2\mu\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{1-2\mu\alpha^2}. \qquad (I5)$$

Преломление поперечной волны сдвига-сжатия может происходить со скольжением вне интервала углов падения

$$\alpha_-^2 \le \alpha^2 \le \alpha_+^2\ ;\quad 2\alpha_\pm^2 = 1 \pm \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\ .$$

При столкновении двух полупространств под углом α_0 со скоростью W_0 геометрия области скольжения имеет более сложное представление:

а) сверхзвуковое схождение

$$\beta_-^2 \le \beta^2 \le W_0^2\ ;\quad \beta = \frac{\sin\alpha_0}{W_0}\ ;\quad 1 \le W_0^2 < \infty\ .$$

б) межзвуковое схождение

$$\mu \le W_0^2 \le 1\ ;\quad \beta_-^2 \le \beta^2 \le \beta_+^2 \text{ и } f \le f_-\ ;\quad \bar\beta_-^2 \le \beta^2 \le W_0^2$$

$$W_0^2 \le \mu \to \beta_-^2 \le \beta^2 \le \beta_+^2 \text{ при } f \le f_- \text{ или } f \ge f_+\ ;\quad \bar\beta_-^2 \le \beta^2 \le \frac{W_0^2}{\mu}$$

Здесь $2W_0^2(1+f^2)\beta_\pm^2 = f^2 + \frac{f^2 W_0^2}{\mu} + W_0^2 \pm \sqrt{\left(f^2 + \frac{W_0^2 f^2}{\mu} + W_0^2\right)^2 - 4f^2(1+f^2)\frac{W_0^2}{\mu}}\ ;$

$$2(f^2-1)W_0^2\bar\beta_\pm^2 = f^2 + \frac{f^2 W_0^4}{\mu} - W_0^4 \pm \sqrt{\left(f^2 + \frac{f^2 W_0^4}{\mu} - W_0^2\right)^2 - 4f^2\frac{W_0^2(f^2-1)}{\mu}}\ ;$$

$$f_\pm^2\left(1-\frac{W_0^2}{\mu}\right)^2 = W_0^2\left[\frac{2}{\mu} - \frac{W_0^2}{\mu} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\mu} - \frac{W_0^2}{\mu} - 1\right)^2 - \left(1-\frac{W_0^2}{\mu}\right)^2}\,\right]$$

п. 3. В главе Ш мы доказываем соответствующие теоремы сходимости для динамических задач теории упругости в норме "энергия" [48] .

Рассмотрим сеточную область прямоугольник Ω с границей S :

$$\beta, \alpha = 1,2\ ;\quad \beta \ne \alpha\ ;\quad 0 \le x_\alpha = i_\alpha h_\alpha \le I_\alpha h_\alpha = 1.$$

Для произвольной сеточной функции f

$$f \equiv f(x_\alpha, x_\beta, t) \equiv f^{i_\alpha i_\beta}$$

определим набор разностных "производных" (опуская в точке i_α, i_β несдвигаемые аргументы):

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{f^{i_\alpha+1} - f}{h_\alpha};\quad \frac{\partial f}{\partial \bar x_\alpha} = \frac{f - f^{i_\alpha-1}}{h_\alpha};\quad \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha 0}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar x_\alpha}\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial \bar x_{\alpha 0}}$ по определению есть центральная производная, если определяющие её точки не выходят за пределы прямоугольника , иначе это односторонняя производная, удовлетворяющая тому же условию.

$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ - односторонняя производная, удовлетворяющая условию отсутствия фиктивных точек при её конструировании.

Если f зависит ещё от одного параметра t (время)

$$0 \leq l\tau < t = n\tau < T,$$

то разностные "производные" по времени от сеточной функции имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f}{\tau}; \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} = \frac{f - f^{n-1}}{\tau}; \quad \frac{\partial f}{\partial t_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Здесь τ, h_α - шаги разностной сетки по времени и пространству.

$$\frac{\tau}{h_\alpha}, \; T \sim const.$$

Выпишем систему разностных уравнений для определения компонент вектора упругих смещений $u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t)$ (суммирование по повторяющимся индексам в этой главе не встречается):

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \bar{t} \partial t} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \bar{x}_\alpha} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\beta} + f_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t); \tag{I6}$$

$$u_\alpha|_{t=0} = u_{\alpha 0}(x_\alpha, x_\beta); \; \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\Big|_{t=0} = \bar{u}_{\alpha 0}(x_\alpha, x_\beta); \tag{I7}$$

$$\left.\left(\sigma_{\alpha n} + h\frac{\partial u_\alpha}{\partial t_0} - \sigma_{\alpha n 0}(x_\alpha, x_\beta, t) - h\,\bar{u}_{\alpha 0}(x_\alpha, x_\beta, t)\right)\right|_S = 0; \tag{I8}$$

где

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha} + \lambda\frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{x}_{\beta 0}} + \lambda\frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial \bar{x}_{\beta 0}}; \quad \lambda = 1 - 2\mu;$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{x}_{\alpha 0}} + \frac{h_\beta}{2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \bar{x}_{\alpha 0}\partial x_\beta}\right);$$

$$\bar{u}_{\alpha 0} = \bar{u}_\alpha(x_\alpha, x_\beta) + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \bar{x}_\alpha} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\beta} + f_\alpha\right)\Big|_{t=0},$$

$$\sigma_{\alpha n} = \sum_{s=1}^{2}\left(\sigma_{\alpha s} - \frac{h_s}{2}\frac{\partial \sigma_{\alpha s}}{\partial \bar{x}_s}\right)n_s; \quad h \sim const$$

n_β - компонента нормали на границах прямоугольника, равные нулю внутри области Ω и определяемые предельным образом в уголках прямоугольника в зависимости от направления подхода к уголку по S.

Явной разностной схеме здесь соответствует

$w_\alpha \to u_\alpha$

Схеме расщепления соответствует

$$в\ \sigma_{\alpha\alpha} \quad w_\alpha \to u_\alpha^{n+\frac{1}{2}}, \ в\ \sigma_{\alpha\beta} \quad w_\alpha \to u_\alpha + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t\,\partial t},$$

где $u_\alpha^{n+\frac{1}{2}}$ определяется на I-м дробном шаге из уравнения

$$\frac{2u_\alpha^{n+\frac{1}{2}} - 2u_\alpha}{\tau^2} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \bar{x}_\alpha} + \mu\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \bar{x}_{\alpha 0}\partial \bar{x}_{\beta 0}} - 2\mu n_\beta \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{x}_{\alpha 0}}\Big/ h_\beta + f_\alpha.$$

На целом шаге u_α^{n+1} определяется в схеме расщепления из эквивалентного 16. уравнения:

$$\frac{u_\alpha^{n+1} - 2u_\alpha^{n+\frac{1}{2}} + u_\alpha^{n-1}}{\tau^2} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\beta};$$

$$g_{\alpha\beta} \equiv \frac{\mu}{2}\frac{\partial(u_\alpha^{n+1} + u_\alpha^{n-1})}{\partial x_\beta} + 2\mu n_\beta \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{x}_{\alpha 0}} + \frac{\mu h_\beta^2 n_\beta}{2}\frac{\partial^3 u_\beta}{\partial \bar{x}_{\alpha 0}\partial x_\beta \partial \bar{x}_\beta}$$

п. 4. Свойства, теоремы сходимости и устойчивости σ - метода.

Свойство I. σ - метод аппроксимирует закон сохранения энергии с порядком $O(\tau^2 + h_\alpha^2)$ и даёт естественную положительно определенную норму ("энергию").

Свойство 2. σ - метод реализует автоматическое расщепление граничных условий с добавками специального вида, не нарушающими порядок аппроксимации.

Свойство 3. Все нормы σ - метода удовлетворяют неравенству треугольника вида $\|u\|^2 \le c\|u-u_1\|^2 + c\|u_1\|^2$, где u и u_1 - произвольные сеточные функции.

Свойство 3. немедленно будет следовать из представимости норм в виде квадратичных членов.

Теорема I.

В норме $\|u\|_\rho$ - центральная разностная схема расщепления, аппроксимирующая с порядком $O(\tau^2 + h_\alpha^2)$ задачу I6 ÷ I8, безусловно устойчива и даёт сходимость к точному решению с порядком $O(\tau^2 + h_\alpha^2)$ в классе достаточно дифференцируемых предельных данных.

Теорема 2.

В норме $\|u\|_H$ - центральная неявная разностная схема, аппроксимирующая с порядком $O(\tau^2 + h_\alpha^2)$ задачу (I6) - (I8), безусловно устойчива и даёт сходимость к точному решению с порядком $O(\tau^2+h_\alpha^2)$ в классе достаточно дифференцируемых предельных условий.

Теорема 3.

В норме $\|u\|_я$ – центральная явная разностная схема, аппроксимирующая с порядком $O(\tau^2+h_\alpha^2)$ задачу (I6)-(I8), условно устойчива и даёт сходимость к точному решению с порядком $O(\tau^2+h_\alpha^2)$ в классе, достаточно дифференцируемых предельных условий

Доказательство теорем ведется на основе энергетических тождеств:

$$\|u\|_{k=1}^{k=n}=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^t \Delta t\left[\int \Delta\Omega\, f_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_0}+\int \Delta S\,\frac{\partial u_\alpha}{\partial t_0}\,\sigma_{\alpha n}\right]+\int_0^t \Pi_1\,\Delta t$$

Здесь Π_1 = 0 для явной и неявной схем и соответствует I9. для схемы расщепления

$$\Pi_1=\sum_{\alpha=1}^{2}\tau^2\int \Delta S\,\frac{\bar\partial^2 u_\alpha}{\partial t_0\,\partial x_\alpha}\,\frac{\bar\partial\,\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \qquad (19)$$

Для явной схемы

$$2\|u\|^2\to 2\|u\|_я^2=\sum_{\alpha=1}^{2}\int\Delta\Omega\left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar t}\right)^2+\frac{\bar\partial u_\alpha^k}{\partial x_\alpha}\,\frac{\bar\partial u_\alpha^{k-1}}{\partial x_\alpha}+\mu\frac{\bar\partial u_\alpha^k}{\partial x_\beta}\,\frac{\bar\partial u_\alpha^{k-1}}{\partial x_\beta}\right.$$
$$\left.+\lambda\frac{\partial u_\alpha^k}{\partial \bar x_{\alpha 0}}\,\frac{\partial u_\beta^{k-1}}{\partial \bar x_{\beta 0}}+\mu\frac{\partial u_\alpha^k}{\partial \bar x_{\beta 0}}\,\frac{\partial u_\beta^{k-1}}{\partial \bar x_{\alpha 0}}\right]$$

Для неявной схемы

$$2\|u\|^2\to 2\|u\|_н^2=\sum_{\alpha=1}^{2}\int\Delta\Omega\left[\left(\frac{\partial u_\alpha^k}{\partial \bar t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\bar\partial u_\alpha^k}{\partial x_\alpha}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\bar\partial u_\alpha^{k-1}}{\partial x_\alpha}\right)^2+\right.$$
$$\left.\frac{\mu}{2}\left(\frac{\bar\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\bar\partial u_\alpha^{k-1}}{\partial x_\beta}\right)^2+\lambda\frac{\partial u_\alpha^k}{\partial \bar x_{\alpha 0}}\cdot\frac{\partial u_\beta^{k-1}}{\partial \bar x_{\beta 0}}+\mu\frac{\partial u_\alpha^k}{\partial \bar x_{\beta 0}}\,\frac{\partial u_\beta^{k-1}}{\partial \bar x_{\alpha 0}}\right].$$

Для схемы расщепления

$$2\|u\|^2\to 2\|u\|_р^2=2\|u\|_н^2+$$
$$\frac{\mu\tau^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\Delta\Omega\left[\left(\frac{\bar\partial^2 u_\alpha^k}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_\alpha^{k-1}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)^2\right].$$

"Интегралы по поверхности, объему и времени, входящие в выше приведенное представление имеют вид:

$$\int f^2 dS \equiv \sum_{s=1}^{2} \sum_{S} 2\theta f^2 |h_s n_s| ; \int f^2 d\Omega \equiv \sum \theta f^2 h_1 h_2 ; \int_0^t f^2 dt \equiv \sum_{n=1}^{n-1} (f^n)^2 \tau ;$$

$$\theta|_S = \frac{1}{2} ; \theta|_{\Omega - S} = 1 ; \quad \theta|_{угол} = 1/4 .$$

Здесь же приводятся некоторые результаты расчетов по разработанным нами алгоритмам и программам. Это задачи распространения волн в прямоугольнике при заданном нагружении и закреплении явными и неявными способами. Иллюстрируются расчеты упругих волн для прямоугольника с внутренними границами, на которых допускается проскальзывание в рамках закона трения Кулона и учитываются температурные эффекты. Рассмотрено соударение двух пластин в линейном приближении.

п. 4. Рассмотрим в области Ω с поверхностью S' (трехмерный параллелепипед с идеально проводящими стенками) разностную схему расщепления 20., 21., аппроксимирующую уравнение Максвелла в момент t :

$$i, \ell, s = 1 \div 3; \quad n\tau = t ; \quad i \neq s \neq \ell ;$$

$$E_i^{n+\frac{s}{3}} = E_i^{n+\frac{s-1}{3}} + \tau \varepsilon_{ise} \frac{\partial H_e^{n+\frac{s}{3}}}{\partial x_s} ; \sum_{k,\ell=1}^{3} \varepsilon_{ike} n_k E_\ell = 0 ; \qquad (20)$$

$$H_\ell^{n+\frac{s}{3}} = H_\ell^{n+\frac{s-1}{3}} - \tau \varepsilon_{\ell si} \frac{\partial E_i^{n+\frac{s}{3}}}{\partial \bar{x}_s} ; \; E_i\Big|_{t=0} = E_i^0 ; \; H_i\Big|_{t=0} = H_i^0 \qquad (21)$$

Здесь n_k - компонента нормали к поверхности S'. E_i, H_i компоненты электрического и магнитного поля на оси координат, ε_{ise} - единичный трехмерный псевдотензор:

После умножения 20. и 21. на $E_i^{n+s/3}$ и $H_\ell^{n+s/3}$ соответственно, суммирования по всем точкам области Ω (где определены разностные производные), по всем дробным шагам и целым шагам получаем теорему сходимости:

Разностная схема расщепления уравнений Максвелла (20-21) устойчива в норме ℓ_2 и имеет сходимость к точному решению порядка $O(\tau + h_\alpha^2)$, если точное решение достаточно дифференцируемо.

Хочу выразить признательность моему научному руководителю члену-корреспонденту АН СССР профессору Яненко Н.Н. за предоставленную тему и полезные обсуждения. Кроме того, несомненным подспорьем в предлагаемой работе явился тесный контакт с Кузнецовым Б.Г., Коноваловым А.Н., Бояринцевым Ю.Е.,

Яушевым И.К. Ряд численных решений предлагаемых алгоритмов получено с участием Крошко Е.А. и Бутенко В.И., за что я им весьма благодарен.

Основное содержание работ по теме диссертации докладывалось на П и Ш Межвузовских конференциях и опубликовано в работах 45 ÷ 49.

Список цитированной литературы:

I. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. "Механика сплошных сред", Гостехтеориздат, I954.

2. Кольский Г. "Волны напряжений в твёрдых телах", ИЛ, I958.

3. Петришин В.И., Приварников А.К. "Основные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований", ПМ, т.I, в.4, I965.

4. Крагельский И.В. "Трение и износ", Машгиз, I962.

5. Пешль Т., Эвальд П., Прандтль Л. "Физика упругих и жидких тел", ГТТИ, I933.

6. Пенлевэ П. "Лекции о трении", Гостехиздат, I954.

7. Крагельский И.В. "Развитие науки о трении", Машгиз,I956.

8. Фрадлин Б.Н. "Неголономная механика в естествознании и технике", докт.дисс., Киев, I965.

9. Добронравов В.В. "Интегральные инварианты уравнений аналитической динамики в неголономных координатах", ДАН,т.XI, № 5, I945.

I0. Аппель П. "Теоретическая механика", Физматгиз, I960.

II. Гольдсмит В. "Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел", Москва, ИЛ, I965.

I2. Смирнов В.И., Соболев С.Л. "Труды СО АН СССР", № 20, 29, I932.

I3. Франк и Мизес "Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики", М.-Л., I937.

I4. Гоголадзе В. "Отражение и преломление упругих волн.Общая теория", М.-Л., АН, I947.

I5. Нарышкина Е.А., Труды СИ АН, № 48, 1934.

I6. Огурцов К.И. "О расчете волновых полей в упругих однородных средах с плоскопараллельными границами раздела". ПМП.

I7. Васильев Ю.Н. "Задача о действии сосредоточенной силы, приложенной к границе двух спаянных полупространств", ПММ.

I8. Вишняков В. "Некоторые задачи теории упругости и термоупругости для параллепипеда", канд.дисс., Томск,1965.

I9. Галфаян П.О. "Об одной плоской задаче теории упругости для составного прямоугольника с учётом сил трения",Из-я АН Арм.ССР, т.I6, в.4, 1963.

20. Сеймов В. "Исследование напряжений в плитах гидротехнических сооружений при учёте сил трения по контакту с основанием", канд.дисс., Киев, 1955.

2I. Николаенко Н.А. "Вопросы расчета плит на упругом основании", Москва, 1958, канд.дисс.

22. Валов Г.М. "Об одной основной смешанной задаче теории упругости для прямоугольника", Из-я АН ОТН, № 3, 196I.

23. Даниловская В.И. "Некоторые статические и динамические задачи термоупругости", докт.дисс., М.,1960.

24. Паркус "Неустановившиеся температурные напряжения", Физматгиз, 1963.

25. Дмитриев А.А. "Двумерная задача о температуре резания металлов", ЖТФ, т.2I, в.7, 195I.

26. Ling F. F. „A quasi-iterative method for computing interface temperature distribution", Z. angew. Math. and Phys., v. 10, No 5, 1959

27. Коровчинский М.В. "Основы теории термического контакта при локальном трении", ст.в.сб. "Новое в теории трения", Наука, Москва, 1966.

28. Рыкалин Н.Н. "Расчеты тепловых процессов при сварке", Машгиз, 195I.

29. Rosental D. „The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments", Trans. A.S.M., v.68 1940.

30. Купрадзе В.Д. "Методы потенциала в теории упругости", Физматгиз, 1963.

31. Гегелиа Т.Г. "Некоторые вопросы теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, теории потенциала и их приложение в теории упругости". докт.дисс.,Тбилиси,1964.

32. Колосов Г.В. "Применение комплексной переменной к теории упругости", М.-Л., ГТТИ, 1935.

33. Мусхелишвили Н.И. "Некоторые основные задачи математической теории упругости", Москва, АН СССР, 1954.

34. Чаплыгин С.А. "Давление жёсткого штампа на упругое основание", Сбор.соч. т.III.

35. Галин Л.А. "Контактные задачи теории упругости", ГИТТИ, Москва, 1953.

36. Бородачев Н.М. "О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии", из-я АН СССР, Мех.и маш. № 5, 1962.

37. Ростовцев Н.А. "О некоторых случаях контактной задачи теории упругости", ПММ.

38. Закорко В.Н., Ростовцев Н.А. "К динамической контактной задаче стационарных колебаний упругого полупространства", ПММ, т.29, № 3, 1965.

39. Фадеев Н.С. "Применение ЭВМ при расчёте инженерных сооружений", Госстройтехиздат, Москва, 1962.

40. Кабулов В.К. "К выводу разностных уравнений трехмерной задачи теории упругости методом интегральных соотношений", ДАН Уз.ССР, № 4, 1958.

41. Яненко Н.Н. "Об экономичных неявных схемах", ДАН, т.134, № 85, 1960.

42. Коновалов А.Н. "Применение метода расщепления к численному решению задач динамической теории упругости", ЖВМ и МФ, т.4, в.4, 1964.

43. Коновалов А.Н. "Об одной итерационной схеме решения статических задач теории упругости", ЖВМиМФ,т.4, № 5, 1964.

44. Самарский А.А. "Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости", ЖВМиМФ, т.5, в.I, 1965.

45. Ватолин Ю.Н. "К общей теории удара двух абсолютно жёстких тел", Ш Казахстанская межвузовская научная конференция по математике и механике, посвященная 50-летию Великой Октябрьской Социалистической революции", Тезисы доклада,1968, (в печати).

46. Ватолин Ю.Н. "Эффект трения верчения в теории удара абсолютно твёрдых тел", Из-я АН СССР,сер.техн.,в.3,1967.

47. Ватолин Ю.Н. "Преломление плоских волн на границе раздела 2-х сред с трением Кулона". Из-я АН СССР, серия техн.,в.2, 1967.

48. Ватолин Ю.Н. " σ -метод решения динамической задачи теории упругости". Из-я АН СССР, серия техн., в.2, 1967.

49. Ватолин Ю.Н. "Метод расщепления для задачи дифракции", "Из-я АН СССР, серия техн., в.3, 1967.

Технический редактор *Л. А. Панина*

Подписано к печати 29.IV.1968г. МН 05058
Бумага 60×90/16. Печ.л. 1.0 Уч.-изд. л. 0.75
Тираж 180 Заказ 167

Институт геологии и геофизики СО АН СССР
Новосибирск, 90. Ротапринт.