АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет математической секции Объединенного ученого Совета
по физико-математическим и техническим наукам

На правах рукописи

И.К. Яушев.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ.

Автореферат диссертации, представленной
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук.

г. Новосибирск.
1967

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет математической секции Объединенного ученого совета
по физико-математическим и техническим наукам

г.Новосибирск,90 Тел. Е-5-05-63

"28" апреля 1967 г. № 28-1-809 ФТ /1298

Совет математической секции Объединенного ученого Совета по физико-математическим и техническим наукам Сибирского отделения Академии наук СССР направляет Вам для ознакомления автореферат диссертации И.К.Яушева на тему "О некоторых методах численного расчета течений газа в каналах переменного сечения в одномерном приближении", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

О дне и времени защиты будет объявлено за 10 дней до защиты в газете "Советская Сибирь".

Ученый секретарь
Совета математической секции Объединенного
ученого совета по физико-математическим и
техническим наукам СО АН СССР
доктор физико-математических наук (М.К.ФАГЕ)

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет математической секции Объединенного ученого совета
по физико-математическим и техническим наукам

На правах рукописи

И.К. Яушев

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Автореферат диссертации,представленной
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук.

Научный руководитель - член-корреспондент
АН СССР Н.Н.ЯНЕНКО.

г.Новосибирск
1967

Работа выполнена в Вычислительном центре
СО АН СССР.

Диссертация, состоящая из введения и трех глав, посвящена разработке методов численного расчета и некоторым аналитическим исследованиям течений идеального газа в каналах переменного сечения. При этом основное внимание уделено одномерной аппроксимации течений в каналах, площадь поперечного сечения которых местами претерпевает резкие внезапные изменения. При описании движения газа в подобных каналах отправным моментом является кусочно-одномерное представление течения.

Такое представление означает, что

I) между скачками сечения канала с координатами x_k и x_{k+1} движение газа в области гладкого течения описывается системой

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho A + \frac{\partial}{\partial x}\rho u A = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u A + \frac{\partial}{\partial x}(p+\rho u^2)A - p\frac{dA}{dx} = 0, \qquad (I)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(e+\frac{u^2}{2})A + \frac{\partial}{\partial x}u\left[p+\rho(e+\frac{u^2}{2})\right]A = 0,$$

где величины $u(x,t)$, $\rho(x,t)$, $p(x,t)$ и $e(x,t)$, постоянные в каждом из поперечных сечений канала, представляют осредненные по площади $A(x)$ значения соответственно осевой составляющей скорости, плотности, давления и внутренней энергии;

2) области течений в окрестности указанных скачков с резким нарушением одномерности потока заменяются тонкими переходными слоями, так что соотношения между значениями пара-

метров потока по разные стороны от них служат для "склеивания" одномерных участков течения. Эти соотношения являются законами сохранения массы, количества движения и энергии на скачке сечения канала и имеют вид [I4]

$$
\begin{gathered}
\rho_5 u_5 A_2 = \rho_4 u_4 A_1 , \\
\rho_5 u_5^2 A_2 + p_5 A_2 - p'(A_2 - A_1) = \rho_4 u_4^2 A_1 + p_4 A_1 , \\
e_5 + \frac{p_5}{\rho_5} + \frac{u_5^2}{2} = e_4 + \frac{p_4}{\rho_4} + \frac{u_4^2}{2} ,
\end{gathered} \tag{2}
$$

где $A_2 = A(x_k - 0)$, $A_1 = A(x_k + 0)$, p' - реакция стенки уступа, равная по величине давлению газа на указанную стенку, индексами "5" и "4" обозначены соответственно параметры потока слева и справа от скачка сечения.

Течения идеального газа, как известно, будут характеризоваться еще наличием внутренних разрывов. Если в соотношениях (2) положить $A_1 = A_2$ и скорости (u_4, u_5) заменить на скорости течения относительно разрыва, то они переходят в известные условия на скачке гидродинамических величин (сильные разрывы) [I2], [I3], [I5]. При численном счете сильные разрывы либо могут быть выделены и рассмотрены особо [4], [II] [I9], либо могут учитываться автоматически с использованием схем сквозного счета [I], [2], [3], [4], [5], [8], [I0]. На слабых же разрывах (разрывы производных) изменение конечно-разностных схем численного интегрирования дифференциальных уравнений не требуется [4].

В данной работе при численных расчетах чаще всего используется второй способ.

Первая глава в основном посвящена выбору конечно-разностных схем для аппроксимации дифференциальных уравнений движения, вторая - аналитическому исследованию условий (2) на основе задачи о распаде разрыва. В третьей главе строится замкнутый алгоритм для численных расчетов течений газа в каналах переменного сечения, в приложении приведены некоторые результаты численных расчетов.

При таком кусочно-одномерном описании течений в каналах со скачками сечения удобно опираться на уравнения движения в форме Эйлера. В работе уравнения в так называемой дивергентной записи (I) аппроксимируются конечно-разностными схемами второго порядка точности, получаемыми методом предиктор-корректор (счет-пересчет) [2] , [7] , [II] . Идея этого метода, как известно, состоит в следующем.

Система одномерных уравнений газовой динамики в дивергентной записи

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(w)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

(w и φ - вектор-функции)
заменяются следующими конечно-разностными уравнениями:

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - W_{i+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t_n} + \frac{\varphi_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \varphi_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 . \tag{4}$$

Если определять величины на промежуточном шаге с индексом $n+\frac{1}{2}$ из какой-либо другой схемы с тем условием, чтобы уравнения (4) в целом были устойчивыми, то получим "дивергентные" схемы второго порядка точности, если даже в схеме-предиктор погрешность аппроксимации будет первого порядка [2] , [7] , [II] . Поэтому для определения величин на шаге $(n+\frac{1}{2})$ используются, как правило, явные или неявные "недивергентные" схемы первого порядка точности.

В главе I дается краткий обзор схем, построенных различными авторами приемом предиктор-корректор.

Для определения $\varphi_i^{n+\frac{1}{2}}$ в уравнениях (4) можно поступить, например, так

$$\varphi_i^{n+\frac{1}{2}} = \varphi_i^n + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_i^n \frac{\Delta t_n}{2} + O(\Delta t_n^2) \approx$$
$$\approx \frac{\varphi_{i-\frac{1}{2}}^n + \varphi_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} - \frac{(B^2 \Delta w)_i^n}{\Delta x} \frac{\Delta t_n}{2} , \quad B = \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\right). \tag{5}$$

В результате получится схема второго порядка точности и устойчивая при

$$\Delta t_n \leq \frac{\Delta x}{\max\limits_i (|u_i^n| + c_i^n)} \qquad (6)$$

(см. [8]).

Однако, полученную схему можно применять при отсутствии внутренних разрывов (сильных) или выделяя последние в процессе счета.

Для сквозного счета разрывных решений Лакс и Вендрофф [8] в выражение (5) добавляют дополнительно "вязкие" члены вида

$$Q(w^n_{i-\frac{1}{2}}, w^n_{i+\frac{1}{2}}) \cdot (w^n_{i+\frac{1}{2}} - w^n_{i-\frac{1}{2}}), \quad Q(a, a) = 0, \qquad (7)$$

где Q - матрица довольно сложной структуры.

Если в уравнениях (4) величины φ отнести к моменту

$$t_n + \tau = t_n + \frac{\Delta t_n}{2}(1+\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \qquad (8)$$

то схема (4) аппроксимирует уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \theta \cdot \frac{\Delta t_n}{2} \frac{\partial}{\partial x} B^2 \frac{\partial w}{\partial x} + O(\Delta x^2). \qquad (9)$$

Члены в правой части (9) можно интерпретировать как "вязкие" члены ("аппроксимационная вязкость"), исчезающая при $\theta = 0$. При численных расчетах, желая аппроксимировать поведение идеального газа при $\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0$, множитель θ полагался равным нулю, а при $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ значение его выбиралось в зависимости от степени крутизны профилей гидродинамических величин. Численные эксперименты показали, что при применении такой схемы для расчета разрывных решений ширина ударного перехода в разностном решении составляет около $3\Delta x$ и не зависит от амплитуды разрыва.

Если означает лагранжеву координату и положить

$$\theta_i^n = \frac{|\Delta \rho_i^n c_i^n|}{\rho_i^n c_i^n} \quad . \tag{10}$$

то структура "вязких" членов в этой схеме будет совпадать со структурой "вязких" добавок в схеме Лакса и Вендроффа.

Если число уравнений в системе (3) равно двум, то, как известно, в инвариантах Римана r и s они принимают вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} + f_1(r,s)\frac{\partial r}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial t} + f_2(r,s)\frac{\partial s}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

В этом случае особенно целесообразным может оказаться применение схем бегущего счета [2] , [9] , [11] . Эти схемы могут быть использованы так же для определения величин на промежуточном шаге в уравнениях (4). В связи с этим в главеI подробно рассмотрены вопросы реализации неявных схем бегущего счета с учетом граничных условий и применения их с выделением разрывов.

Вторая глава посвящена вопросам реализации условий (2) на основе решения задачи о распаде разрыва в канале со скачком площади сечения. Постановку задачи можно найти в работе В.Г.Дулова [14] , в которой картины течения рассматривались на основе соотношений (2) с довольно сложной зависимостью p' от других параметров. В данной работе для p' использовались другие более простые зависимости, благодаря чему был проведен полный численный анализ всевозможных конфигураций распада разрыва на скачке сечения канала.

Анализ возможных решений проводится аналитическим методом, который опирается на алгебраическое рассмотрение условий на "элементарных" волнах (ударные волны, контактные разрывы и центрированные волны разрежения) и соотношений (2) и иллюстрируется графически на (p, u) – плоскости.

Пусть для определенности

$$\alpha = \frac{A_1}{A_2} < 1.$$

Вначале полагается, что

$$p' = p_5 \qquad (12)$$

и рассматриваются газы с уравнением состояния

$$p = (\gamma-1)\rho e. \qquad (13)$$

Решения - (а) с $u_5 \geq 0$ и $u_4 \geq 0$ (поток после распада направлен в сторону внезапного сужения канала) рассматриваются отдельно от решений - (б) с $u_4 < 0$, $u_5 < 0$ (поток направлен в сторону расширения канала).

а. В этом случае соотношения (2) для p_4, u_4, ρ_4 через p_5, u_5 и ρ_5 дают по два значения, одно из которых относится к дозвуковому режиму перехода через скачок сечения, другая - к сверхзвуковому. Кроме того, состояния "5" и "4" не всегда оказываются совместными (для некоторых значений параметров p_5, u_5, ρ_5 и α p_4, u_4 и ρ_4 принимают мнимые значения). Это обстоятельство используется для определения области допустимых значений p_5 и u_5 на (p, u) - плоскости.

Если для исходного состояния, заданного на левом участке, $u < c$ (c - скорость звука), то может иметь место одна из следующих конфигураций:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\leftarrow} B\ T\ S_{\rightarrow} \\ S_{\leftarrow} B\ T\ R_{\rightarrow} \\ R_{\leftarrow} B\ T\ R_{\rightarrow} \\ R_{\leftarrow} B\ T\ S_{\rightarrow} \end{array}\right\} (A) \qquad \left.\begin{array}{l} S_{\leftarrow} B\ R_{\leftarrow} T S_{\rightarrow} \\ S_{\leftarrow} B\ R_{\leftarrow} T R_{\rightarrow} \\ R_{\leftarrow} B\ R_{\leftarrow} T R_{\rightarrow} \\ R_{\leftarrow} B\ R_{\leftarrow} T S_{\rightarrow} \end{array}\right\} (B)$$

где принята следующая символика: S - ударная волна, T - контактный разрыв, R - волна разрежения, B - "разрыв" течения на скачке сечения канала, стрелками указано направление, в котором обращена волна.

Если для начального состояния на левом участке $u > c$, то, кроме решений вида (А) и (В), имеются решения:

$$
\begin{array}{llll}
-B & R_{\leftarrow} & T & S_{\rightarrow} \\
-B & R_{\leftarrow} & T & R_{\rightarrow} \\
-B & S_{\leftarrow} & T & S_{\rightarrow} \\
-B & S_{\leftarrow} & T & R_{\rightarrow}
\end{array}
\qquad (C)
$$

б. Если выразить из соотношений (2) p_5, u_5, ρ_5 через p_4, u_4, ρ_4, то для первых получаем по два значения, относящиеся к дозвуковому и сверхзвуковому режимам перехода через скачок сечения. В этом случае соотношения (2) всегда оказываются совместными и круг решений значительно шире. Кроме решений, аналогичных (A), (B) и (C), имеются решения со стационарным скачком уплотнения в сечении A_x таком, что

$$A_1 \le A_x \le A_2$$

Другими словами, если в направлении потока происходит внезапное расширение канала, то для некоторых исходных состояний и значения α сопряжение различных участков течения без скачка уплотнения в промежуточном сечении невозможно. Эти решения строятся двухкратным применением соотношений (2) со значениями скачков сечения: $\alpha_x = \frac{A_1}{A_x}$ $\alpha_x' = \frac{A_x}{A_2}$. Их условно можно представить в виде

$$
\begin{array}{llllll}
S_{\leftarrow} & T & B_x' & S_{\rightarrow} & B_x & R_{\rightarrow} \\
R_{\leftarrow} & T & B_x' & S_{\rightarrow} & B_x & R_{\rightarrow} \\
R_{\leftarrow} & T & B_x' & S_{\rightarrow} & B_x & - \\
S_{\leftarrow} & T & B_x' & S_{\rightarrow} & B_x & -
\end{array}
\qquad (Д)
$$

Таким образом, имеется 28 различных возможностей, вместо 4 при $\alpha = 1$. Обзор работ, посвященных рассмотрению аналогичных задач, показывает, что выбор соотношений на скачке сечения является неоднозначным. Многие авторы [16], [17] вместо закона сохранения количества движения берут условие адиабатичности

$$\frac{p_5}{\rho_5^{\gamma}} = \frac{p_4}{\rho_4^{\gamma}} \qquad (14)$$

Для сравнения был проведен анализ решений и для такой модели. Кроме того, для случая (б) рассматривалась зависимость

$$p' = p_4. \qquad (15)$$

Сравнение результатов показывает, что все эти модели дают сходные картины течения.

При $p' = p_5$ в конфигурациях С наблюдается убывание энтропии (хотя и незначительное) по потоку при переходе через скачок сечения канала. Такие нежелательные особенности могут быть устранены переходом к другой модели, например, к модели с условием (14).

Результаты численных расчетов задачи о распаде и сравнение их с данными эксперимента из работы [17] приводятся в приложении.

Результаты теории распада, которые имеют и самостоятельное значение, используются в третьей главе для замыкания вычислительного алгоритма, предназначенного для численных расчетов течений газа в каналах со скачками поперечного сечения.

При нашем рассмотрении область интегрирования окажется разделенной на ряд полос прямыми $x_k = const$ (x_k – координаты скачков сечения). Пусть в каждом из промежутков $[x_k, x_{k+1}]$ введено разбиение: $x_i^{(k)}, i=1,\dots,m_{k+1}, x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)} = \Delta x^{(k)}$ и для численного интегрирования дифференциальных уравнений применяется, например, схема описанная выше, в которой гидродинамические величины отнесены к серединам элементарных отрезков $(x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)})$. Чтобы воспользоваться данной схемой для счета следующего слоя по времени, требуется знание величин w слева и справа от точек x_k. Они могут определяться из следующих соображений.

В точках x_k в момент t_n приходят в соприкосновение два произвольных постоянных потока:

$$u = u^n_{m_k-\frac{1}{2}}\ ,\ p = p^n_{m_k-\frac{1}{2}}\ ,\rho=\rho^n_{m_k-\frac{1}{2}}\ ,\quad x^{(k)}_{m_k-\frac{1}{2}} < x < x_k\ ,$$

$$u = u^n_{1_{k+1}+\frac{1}{2}}\ ,\ p = p^n_{1_{k+1}+\frac{1}{2}}\ ,\ \rho = \rho^n_{1_{k+1}+\frac{1}{2}}\ ,\quad x_k < x < x^{(k+1)}_{1_k+\frac{1}{2}}$$

если эти значения, отнесенные к точкам $x^{(k)}_{m_k-\frac{1}{2}}$ и $x^{(k+1)}_{1_k+\frac{1}{2}}$, считать продолженными слева и справа до точки x_k. В соответствии с изложенной теорией рассчитывается распад разрыва. Если считать, что изменения параметров течения в результате распада происходят мгновенно и приобретают те значения, которые достигаются, вообще говоря, только асимптотически, то за

$$u(x_k-0,\tau)\ ,\quad p(x_k-0,\tau),\rho(x_k-0,\tau),\ e(x_k-0,\tau)\quad (\varphi(x_k-0,\tau)),$$

$$u(x_k+0,\tau)\ ,\quad p(x_k+0,\tau),\rho(x_k+0,\tau),\ e(x_k+0,\tau)\quad (\varphi(x_k+0,\tau))$$

можно принять значения, которые образовались бы слева и справа от точки x_k в результате распада. Эти значения параметров течения будут удовлетворять условиям (2).

Таким образом, в каждый момент времени t_n "склеивание" одномерных участков течения будет производиться в процессе счета с соблюдением законов сохранения на скачке сечения канала.

Если распад произвольного разрыва будет рассчитываться в каждой точке $x_i^{(k)}$, то получим обобщение схемы "Распад разрыва" С.К.Годунова [I] на случай, когда в точках $x_i^{(k)}$, кроме разрывов параметров течения, может быть скачок сечения канала.

Построенный выше алгоритм применялся для численного решения ряда задач о течениях газа в каналах. Некоторые из полученных результатов обсуждаются в главе III и приводятся в приложении.

Результаты диссертации докладывались на II Всесоюзной конференции по Вычислительной математике (Москва, январь 1965), на межвузовской конференции по математике и механике (Алма-

Ата, 1965), на Всесоюзном совещании по точным решениям уравнений газовой динамики (Новосибирск, 1966), на Всесоюзном совещании о неустановившихся потоках жидкости и газа в руслах и трубопроводах (Новосибирск, декабрь 1966) и опубликованы в работах [11], [18] .

В заключение автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность научному руководителю Н.Н.Яненко за внимание и большую поддержку при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

[I] С.К.Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. Математ.сб.,1959, 47(89), № 3, 27I-306.

[2] С.К.Годунов. Разностные методы решения уравнений газовой динамики. Лекции для студентов НГУ, 1969, Новосибирск.

[3] J. Neumann, R.D.Richtmyer. A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks. J.Appl. Phys., 1950, 21.

[4] Р.Д.Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, I960, Москва.

[5] P.Lax. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Comm. Pure and Appl. Math., 1954, vol.7, 159-193.

[6] С.К.Годунов, К.А.Семендяев. Разностные методы численного решения задач газовой динамики. Ж.выч.матем.и матем.физ., I962, 2, № I.

[7] J.Douglas, B.F.Jones. On predictor-corrector methods for nonlinear parabolic differential equations. J.Soc.for Industr. and Appl. Math., 1963, 11, No.1, 195-204.

[8] P.Lax, B.Wendroff. Conservation laws - II. Comm. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13.

[9] Л.Д.Ландау, Н.Н.Мейман, И.М.Халатников. Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток. Труды 3 Всесоюзного матем.съезда, I958, т.3,Москва

[I0] А.А.Самарский, В.Я.Арсенин. О численном решении уравнений газовой динамики с различными типами вязкости. Ж.выч.матем. и матем.физ. I96I, I, № 2, 357-360.

[II] Н.Н.Яненко, И.К.Яушев. Об одной абсолютно устойчивой схеме интегрирования уравнений гидродинамики. Труды МИАН, т.74, 1966, I4I-I46.

[I2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошной среды, I954,Москва.

[13] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидродинамика, физматгиз, 1963, Москва.

[14] В.Г.Дулов. Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения. Вестник ЛГУ, 1958, № 19.

[15] К.П.Станюкович. Неустановившиеся движения сплошной среды, 1955, Москва.

[16] У.Честер. Распространение ударных волн в каналах переменного сечения. Сб.Проблемы механики, вып.4, 1963, 100-127.

[17] А.Кэхейн, В.Уоррен, В.Гриффит, А.Марино. Теоретическое и экспериментальное изучение распространения волн конечной амплитуды в каналах переменного сечения. Сб. Механика, 1955, № 4, 12-38.

[18] И.К.Яушев. О численном решении течения газа, возникающего в сосудах, соединенных каналом. Тезисы доклада на Всесоюзном совещании о неустановившихся потоках жидкости и газа в руслах и трубопроводах, ИГ и ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1966.

[19] А.И.Жуков. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики. Труды МИАН, 1960 т.58.

[20] И.К.Яушев. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения. Изв. СО АН, техн.серия, № 8, вып. 2, 1967 (в печати).

[21] И.К.Яушев. Численный расчет течений газа в каналах со скачком площади сечения в одномерном приближении. Изв. СО АН, техн. серия, № 8, вып. 2, 1967 (в печати).

МН 03084. Подписано в печать 26/IУ- 67 г. Бумага 60х84 I/I6.
Объем I п. л. Тираж 220. Заказ I07. Лаборатория фотоофсетной
печати Института экономики СО АН СССР.